Corecţii ale forţei gravitaţionale newtoniene şi limitele lor de valabilitate

Mugur B. Răuţ

Maricel Agop

Cuprins

Cuprins.....2
Introducere.....5
Cap. I. Locul teoriei relativităţii generalizate
În fizica actuală.....9
I.1. Elemente de relativitate restrânsă şi generală.....9
I.1.a. Principiile teoriei relativităţii.....9
I.1.b. Invarianţa în timp fizic a constantelor fizice fundamentale.....12
I.2. Confirmări experimentale ale teoriei relativităţii generalizate.....20
I.2.a. Avansul de periheliu.....20
I.2.b. Deviaţia razelor luminoase în câmp gravitaţional.....26
I.2.c. Retardarea gravitaţională a undelor electromagnetice.....30
I.2.d. Deplasarea spre roşu a liniilor spectrale în câmp gravitaţional.....32
I.3. Posibile teste ale teoriei relativităţii generalizate.....34

I.3.a. Undele gravitaţionale.....34
I.3.b. Găurile negre.....35
I.3.c. Variaţia constantei atracţiei universale.....36
Referinţele capitolului I.....44
Note.....46
Capitolul II. Mişcarea în sisteme de referinţă neinerţiale.....47
II.1. Problema celor două corpuri în repere inerţiale.....47
II.2. Calculul deviaţiei newtoniene a luminii în câmp gravitaţional.....49
II.3. Calculul avansului de periheliu în sisteme inerţiale.....54
II.4. Problema celor două corpuri în repere neinerţiale.....60
II.5. Calculul deviaţiei luminii în câmp gravitaţional.....62
II.6. Calculul avansului de periheliu.....64
II.7. Efectul Eötvös.....65
Referinţele capitolului II.....68
Capitolul III. Studiul mişcării eliptice în diferite formalisme.....69
III.1. Formalismul lagrangean.....69
III.2. Formalismul hamiltonian.....73
III.3. Mişcarea eliptică spaţială.....75
III.4. Problema celor n corpuri în repere neinerţiale.....82

Referinţele capitolului III.....87
Capitolul IV. O abordare newtoniană a dinamicii galaxiilor din perspectiva materiei întunecate.....88
IV.1. Introducere.....88
IV.2. Forţe atractive şi dinamica galaxiilor.....89
IV.3 Verificarea ecuaţiei Poisson.....92
IV.4 Forţele repulsive şi dinamica galaxiilor.....93
Referinţele capitolului IV.....97
Capitolul V. Variaţia constantei gravitaţionale cu timpul în contextul expansiunii universului.....98
V.1. Introducere.....98
V.2. Echivalentul newtonian al constantei cosmologice.....99
V.3. Variaţia constantei gravitaţionale într-un univers newtonian.....100
V.4. Discuţii asupra modelului.....103
Referinţele capitolului V.....106
Capitolul VI. Elemente de mecanică invariantivă.....108
VI.1. Mişcarea invariantivă inerţială a punctului material. Introducere.....108
VI.2. Mişcarea inerţială a punctului material.....108
VI.3. Metrica şi transformările Lorentz

pentru universul Minkovski-Einstein.....112
VI.4. Universul anti-Minkovski.....115
VI.5. Mişcarea inerţială a punctului material
În universul Minkovski-Einstein.....116
VI.6. Mecanica invariantivă a sistemelor de puncte materiale. Invarianţi euclidieni. Principiul mişcării.....117
VI.7. Legi de conservare.....119
VI.8. Expresiile impulsurilor.....119
VI.9. Expresia energiei.....120
VI.10. Determinarea masei de interacţie gravitaţională.....122
VI.11. Determinarea masei de interacţie dilataţională.....123
VI.12. Problema celor două corpuri în mecanica newtoniană.....124
Referinţele capitolului VI.....128
Capitolul VII. Multidimensionalitate sau fractalitate?.....130
VII.1. Morfogeneza structurilor gravitaţionale văzute prin prisma unei aproximaţii hidrodinamice nediferenţiabile.....131
VII.2. Model matematic.....133
VII.3. Problema unui singur corp în hidrodinamica nediferenţiabilă.....137
VII.4. Morfogeneza sistemelor gravitaţionale

în aproximaţia hidrodinamică nediferenţiabilă.....141
VII.5. Concluzii.....144
Referinţele capitolului VII.....145
Figurile capitolului VII.....148
Capitolul VIII. Potenţialul gravitaţional generalizat.....152
VIII.1. Introducere.....152
VIII.2. Verificarea ecuaţiei Poisson.....154
VIII.3. Discuţii.....156
VIII.4. Potenţialul gravitaţional al unei pături multidimensionale.....157
VIII.4.a. Introducere.....157
VIII.4.b. Cazul n-dimensional.....158
VIII.4.c. Concluzii.....161
Referinţele capitolului VIII.....161

Introducere

Tematica acestei lucrări este de actualitate ştiinţifică şi tratează excepţiile de la binecunoscuta lege a gravitaţiei newtoniene şi condiţiile în care apar acestea.

Un prim set de excepţii, ca să spunem aşa, apare în cazul sistemelor de referinţă neinerţiale. Corecţiile forţei newtoniene sunt termeni suplimentari care apar datorită condiţiilor în care se face mişcarea, condiţiilor, independente de scală, în care se fac măsurătorile şi modului cum alegem sistemele de referinţă.

Al doilea set de excepţii apare în cazul, generic numit, dependent de scală. Forţa gravitaţională newtoniană suferă transformări importante, la scale mici şi la scale mari, faţă de scala obişnuită.

Contribuţiile pe care le aduce, aşadar, această lucrare, investighează o gamă largă de cercetări, de orientări, uneori diferite, ale gândirii ştiinţifice şi de

probleme neelucidate încă. Legăturile cu realitatea concretă s-au făcut, acolo unde a fost posibil, cu datele experimentale sau, în celelalte cazuri, cu alte rezultate teoretice, cunoscute, consacrate de alte verificări experimentale. Oricum, deşi lucrarea a fost concepută cu accente teoretice bine definite, ea işi rezervă şi dreptul de a avea o anumită doză de speculaţie ştiinţifică.

Intenţia primelor trei capitole ale lucrării de faţă este de a umple câteva goluri în edificiul mecanicii cereşti, de a face o descriere a unor fenomene şi mărimi cât mai apropiată de realitate, folosind modele fizice intuitive.

Se ştie că teoriile actuale ale mecanicii cereşti, privite din perspectiva lor clasică, sunt concepute pentru sisteme de referinţă inerţiale. De exemplu, sistemul nostru solar este privit ca un ansamblu de n corpuri ce execută mişcări individuale după traiectorii conice în jurul corpului central, Soarele, considerat reper inerţial. În realitate, însă, aceasta este doar o primă aproximaţie. Având în vedere că mişcarea lui de revoluţie în jurul centrului galaxiei este foarte amplă, în această aproximaţie raza traiectoriei sale de revoluţie se consideră tinzând la infinit şi astfel traiectoria este o dreaptă, iar reperul devine inerţial.

Totuşi, realitatea nu este aşa. Acest motiv reprezintă intenţia primelor trei capitole ale lucrării. Să studieze mişcarea corpurilor cereşti în diferite repere fizice, din punctul de vedere al mecanicii cereşti clasice şi moderne, şi să compare rezultatele cu cele ale mecanicii relativiste. Pe parcursul lor vor apărea unele similitudini interesante, vor fi explicate chiar nişte fenomene ce n-au putut fi explicate în cadrul mecanicii inerţiale şi nici relativiste. Vor fi aduse corecţii formulelor clasice ce ţin cont de mişcarea reală.

În principiu, aceste prime trei capitole ale lucrării au la bază calculul avansului de periheliu şi al deviaţiei razelor de lumină în câmp gravitaţional. Am optat pentru aceste confirmări din motiv că pe baza lor se pot face comparaţii cu mecanica relativistă. Având în vedere superioritatea şi multitudinea predicţiilor mecanicii relativiste, scopul demersului nostru nu este deci de a reabilita mecanica clasică ci, din contră, de a înţelege mai

bine fenomenele fizice pe modele cât mai puţin abstracte şi cât mai apropiate de realitate.

În următoarele cinci capitole ne propunem să studiem ce modificări poate suferi forţa gravitaţională newtoniană şi condiţiile în care acestea apar. Magnitudinea forţei gravitaţionale F dintre două corpuri macroscopice, situate la distanţa r unul de celălalt, se supune legii : $F \propto r^{-2}$. La distanţe foarte mici dependenţa de r^{-2} conduce la forţe inimaginabile, care tind către infinit, iar la distanţe mari, cosmice, forţele vor tinde la zero. Dar, ambele situaţii ne dezavantajează pentru că, experimental, nu le putem măsura uşor.

Într-adevăr, posibilităţile noastre experimentale, la ora actuală, sunt limitate la fel ca şi cunoaşterea noastră asupra validităţii acestei legi a naturii. De exemplu, nu se poate stabili clar cum se comportă gravitaţia la distanţe mai mici de $10^{-4} cm$. Începând cu această limită măsurarea forţei F nu se mai poate face cu precizie, iar acest fapt pune sub semnul îndoielii valabilitatea legii $\propto r^{-2}$ la această scală.

Un rezultat interesant venit în sprijinul acestei idei a fost dat de Ehrenfest. Studiind forma potenţialului gravitaţional generat de o distribuţie radială a materialului într-un spaţiu n-dimensional, el rezolvă ecuaţia lui Poisson, care are soluţia :

$$\phi \sim r^{2-n}, \quad n \neq 2, \quad n > 2$$

Se vede de aici că pentru spaţii cu 3 dimensiuni (precum este şi spaţiul newtonian) forma arhicunoscută a potenţialului gravitaţional $\Phi \propto r^{-1}$ este ceva natural. Alte dependenţe, de r^{-3}, r^{-4}, r^{-5} etc. nu corespund unor dimensionalităţi newtoniene şi prin urmare nici unei mecanici newtoniene, aşa cum este acceptată în prezent. Dependenţa $\Phi \propto r^{-2}$ ne-ar duce cu gândul la un spaţiu cu 4 dimensiuni, einsteinian, în care potenţialele de acest tip ar putea exista dacă ar mai fi valabil cadrul conceptual al mecanicii newtoniene. Însă în relativitatea generală conceptul de potenţial fizic are o semnificaţie diferită faţă de mecanica clasică.

La distanţe mici efectul extradimensiunilor poate fi considerabil. După cum am văzut, forma potenţialului gravitaţional se schimbă şi ceea ce pare surprinzător e faptul că schimbarea se face funcţie de micşorarea distanţelor. Argumente similare sunt valabile şi în cazul altor interacţiuni în afara celor gravitaţionale, de pildă în cazul interacţiunilor electrice, specifice microcosmosului particulelor elementare. Forţa electrică F_c se supune aceleiaşi dependenţe: $F_c \propto r^{-2}$, de inversă proporţionalitate cu distanţa dintre particulele încărcate electric, la care se măsoară. De aici decurge şi interesul lumii ştiinţifice asupra extradimensionalităţii spaţiului fizic.

În plus, acest interes este mult amplificat de faptul că teoriile de unificare a tuturor forţelor fundamentale ale naturii, plauzibile din punct de vedere fizic şi corecte din punct de vedere matematic, sunt teoriile care folosesc extradimensiuni. Unele din aceste teorii postulează legi diferite după care se face interacţiunea gravitaţională.

Dintre aceste teorii, candidata cea mai serioasă la titlul de teorie a marii unificări este teoria M, teoria membranelor. Din punct de vedere ştiinţific nu se poate concepe o proprietate unificatoare a materiei sub care să se integreze, existând o legătură între ele, două sau mai multe proprietăţi distincte ale materiei. În cazul de faţă este vorba de masa şi sarcina electrică, două proprietăţi distincte ale materiei, fără nici o legătură fizică evidentă între ele. Singura legătură plauzibilă, indirectă, pare a fi conceptul de energie. Cu toate acestea, la o energie foarte mare, la care s-ar presupune că ar exista legătura dintre aceste două proprietăţi, se pierde identitatea ei, energia devenind astfel forma în care se manifestă ambele interacţiuni, gravitaţională şi electromagnetică. Chiar şi aşa, nu există o corespondenţă biunivocă la acelaşi nivel de energie, joasă, specifică lumii macroscopice. Iar testarea acestei ipoteze pare imposibil de realizat cu mijloacele tehnice contemporane.

La polul opus, neputinţa noastră tehnică actuală pune la îndoială şi măsurătorile forţei gravitaţionale care se fac la distanţe mai mari de $10^{28} cm$. Peste această limită

superioară nu mai este valabilă legea $F \propto r^{-2}$. Enormitatea distanţelor cosmice face practic imposibilă decelarea unor influienţe necunoscute. O posibilitate de considerare a lor, deocamdată, este şi modificarea legii $F \propto r^{-2}$.

Această lege nu suferă aşadar modificări între limitele $10^{4} cm \leq r \leq 10^{28} cm$, de unde rezultă şi necesitatea de a căuta o expresie generală a ei, valabilă dincolo de aceste limite. Unul din scopurile lucrării de faţă este de a propune o expresie în acest sens. Vom prezenta în capitolele mai sus-amintite câteva teorii, dintre cele mai populare şi nu numai, în favoarea acestei modificări a legii gravitaţiei, iar în final vom propune propria generalizare. Aceasta se va realiza atât din considerente teoretice cât şi observaţionale, urmărindu-se ca primele să se regăsească, cât mai mulţumitor, în cele din urmă şi viceversa.

Soluţia propusă nu are nici un fel de pretenţie de unicitate, în sensul excluderii celorlalte soluţii prezentate, ci doar caută să vină cu un element de noutate într-o chestiune foarte importantă a fizicii contemporane. Fără doar şi poate nu avem pretenţia de a spune ultimul cuvânt în această problemă deschisă. Vrem doar să arătăm că se poate gândi rezolvarea acestei probleme şi în modul pe care îl vom prezenta.

În linii mari, lucrarea este structurată urmând cumva o evoluţie a ideilor. În capitolul I se prezintă poziţia ştiinţei în prezent, elemente introductive de teoria relativităţii generalizate, confirmările acestei teorii şi o parte din infirmări. În capitolul II se studiază mişcarea în sisteme de referinţă neinerţiale în cadrul unei teorii care se doreşte o generalizare a teoriei newtoniene a gravitaţiei la sistemele de referinţă non-inerţiale, văzute ca o teorie alternativă la teoria relativităţii generalizate, la viteze şi energii mici. Capitolul III studiază mişcarea neinerţială în diferite formalisme şi încheie practic această parte dedicată mecanicii neinerţiale. Cu capitolul IV începe studiul modificărilor ce trebuie aduse legii gravitaţiei newtoniene. În el se propune o teorie alternativă la teoria MOND, teoria dinamicii newtoniene modificate. Capitolul V construieşte pe baza unei forţe newtoniene modificate un model cosmologic, atât la scară galactică cât şi la scara întregului

univers. Capitolul VI prezintă succint câteva elemente de mecanică invariantivă. Capitolul VII prezintâ o alternativâ la multidimensionalitate, fractalitatea, şi aratâ cum spaţiu-timpul fractalic poate induce o modificare a forţei gravitaţionale newtoniene. Iar capitolul final, al VIII-lea, cautâ să sintetizeze toate rezultatele anterioare cu privire la modificările aduse forţei newtoniene, intr-o teorie originală.

Capitolul I

Locul teoriei relativităţii generalizate în fizica actuală

I.1 Elemente de relativitate restrânsă şi generală

I .1. a Principiile teoriei relativităţii

Anul 1905 a fost pentru fizică anno mirabilis. În acest an fizicianul german A. Einstein a pus bazele uneia din cele mai profunde, complexe şi importante, prin consecinţele sale, teorii, şi anume teoria relativităţii. Deşi apariţia teoriei relativităţii în forma ei restrânsă a fost o chestiune de timp şi conjunctură în istoria ştiinţei, meritele autorului ei nu trebuie defel minimalizate. El generalizează transformările Lorenz, valabile până atunci la fenomenele electromagnetice, la mecanica sistemelor de referinţă inerţiale şi demonstrează câteva consecinţe care vor fi puţin

mai târziu verificate experimental. Pe baza unor experimente mentale simple, metoda sa de lucru, Einstein arată că prin acceptarea câtorva ipoteze simple se poate generaliza principiul relativităţii Galilei-Newton, valabil în mecanica clasică, în cazul unei mişcări cu o viteză apropiată de viteza luminii. Întâi de toate se înlocuieşte conceptul de corp de referinţă cu cel de sistem de referinţă. În această manieră se reuşeşte o abordare mai generală a mişcării, eliminându-se de la început unele ambiguităţi legate de particularităţile corpului de referinţă şi de conceptul clasic de punct material. Dealtfel este mai simplu să raportezi mişcarea unui sistem de referinţă inerţial la un sistem de referinţă fix, fără a mai face alte supoziţii suplimentare.

Apoi teoria relativităţii reuşeşte să unifice conceptele clasice de spaţiu şi timp într-unul mai general, cel de spaţiu-timp. Dealtminteri, şi în mecanica clasică acest concept general era prezent, însă nu într-o formă explicită. În această ordine de idei se defineşte timpul fizic ca fiind o măsură a mişcării şi spaţiul fizic ca varietatea, la scară, pe care se face mişcarea. În continuum-ul spaţio-temporal, timpul fizic este o măsură a spaţiului fizic şi viceversa. Nu se pot măsura, în cadrul unui singur experiment, decât unul prin celălalt. Această constatare foarte importantă este o limitare fizică, experimentală, care îşi are originea în relaţiile de nedeterminare Heisenberg, impuls-distanţă şi energie-durată. În plus acest concept general, de spaţiu-timp, este o consecinţă firească a legii de propagare a luminii în sistemele de referinţă inerţiale. Lumina se propagă cu viteză fixă, limită, c, în toate sistemele de referinţă inerţiale. Mai mult decât atât, ea nu este aditivă.

O altă consecinţă a legii de propagare a luminii în vid este principiul cauzalităţii. Potrivit acestuia niciodată timpul corespunzător cauzei producerii unui eveniment nu poate fi ulterior timpului corespunzător efectului aceluiaşi eveniment fizic. Prin eveniment putem subînţelege conceptul de fenomen. Timpul, deşi este un concept abstract, este deci o măsură a mişcării şi curgerea lui formală este într-o singură direcţie, de la trecut la viitor. O inversare în sensul său de curgere ar atrage după sine o încalcare a principiului cauzalităţii, fapt ce ar avea drept

consecinţă imposibilitatea de a stabili o relaţie cauzală în descrierea fenomenelor fizice. Cu alte cuvinte, ar fi imposibilă, în contextul cauzalităţii, o călătorie în trecut. În schimb, curgerea timpului în sensul său fizic poate fi accelerată funcţie de viteza sistemului de referinţă inerţial faţă de sistemul de referinţă fix în care acesta (timpul) se măsoară. Are loc aşa-numita dilatare a timpului. E un fel de călătorie în viitor foarte bine ilustrată de paradoxul gemenilor. Unul din ei călătoreşte în spaţiul cosmic cu o navă, vreme de câţiva ani măsuraţi în navă, cu viteze comparabile cu viteza luminii, celălalt geamăn rămânând pe Pământ. La finele călătoriei spaţiale fratele de pe navă constată cu stupoare că pe Terra au trecut milioane de ani. Acest fenomen poate fi inţeles ca fiind o altă faţetă a unei alte consecinţe a teoriei relativităţii restrânse şi anume nesimultaneitatea evenimentelor. Două evenimente similare (de ex. îmbătrânirea fizică a gemenilor) nu sunt simultane în cele două sisteme de referinţă ci au loc cu viteze diferite. Cel ce călătoreşte în spaţiu va îmbătrâni mult mai încet. Astfel, aşa-zisa călătorie în viitor se face în sensul că timpul curge cu viteze diferite în cele două sisteme de referinţă inerţiale.

Nu putem încheia aceste scurte consideraţii asupra legii de propagare a luminii în vid fără o altă consecinţă a ei: contracţia lungimilor. Lungimile măsurate în sistemul de referinţă mobil şi în cel fix nu sunt identice. Observatorul situat în sistemul de referinţă fix va măsura lungimea corespunzătoare în sistemul de referinţă mobil şi aceasta i se va părea cu atât mai mică cu cât referenţialul mobil se deplasează cu o viteză apropiată de viteza luminii. La atingerea acestei viteze lungimea măsurată în referenţialul fix va fi zero.

Legea de propagare a luminii este o cosecinţă a principiului relativităţii restrânse. Potrivit acestuia legile naturii sunt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale. Cu alte cuvinte ecuaţiile fizicii sunt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale. Ele îşi păstrează forma şi semificaţia mărimilor fizice care le compun iar constantele fizice fundamentale sunt aceleaşi indiferent de sistemul de referinţă inerţial considerat. Prin urmare şi

legea: „viteza luminii este constantă, indiferent de sistemul de referinţă inerţial în care se măsoară ea”, este o consecinţă a principiului relativităţii restrânse. Altminteri viteza luminii ar fi diferită, funcţie de sistemul de referinţă în care se măsoară. Vedem aşadar că acest principiu este un principiu fundamental. Din el derivă legea de propagare a luminii, împreună cu care formează cei doi piloni de bază ai teoriei relativităţii restrânse. Deasemenea, principiul fundamental al relativităţii restrânse are o valoare euristică, generală, este generator de legi şi ecuaţii care descriu fenomene fizice în sisteme de referinţă inerţiale aflate departe de un observator fix. Acest principiu exprimă de fapt unitatea legică a naturii, indiferent de locul în care se manifestă ea.

Aceleaşi idei fundamentale sunt valabile şi în cazul teoriei relativităţii generalizate. Această teorie, după unii cea mai înaltă culme a geniului uman, este teoria modernă a gravitaţiei şi reprezintă o formă generală a relativităţii restrânse. Deci în ea se generalizează principiile relativităţii restrânse la sistemele de referinţă neinerţiale. În genere în natură mişcarea inerţială este un caz particular, rar, al mişcării neinerţiale, accelerate. De aceea, pentru o mai fidelă descriere a naturii trebuie luat în considerare acest fapt. Dacă această mişcare mai este şi o consecinţă a unei acţiuni gravitaţionale atunci vom avea o teorie a gravitaţiei.

De fapt teoria relativistă a gravitaţiei reprezintă o generalizare a teoriei clasice a lui Newton. Teoria clasică a gravitaţiei este practic neputincioasă când trebuie să descrie fenomene fizice aflate la distanţe cosmice, când trebuie să evalueze avansul de periheliu a anumitor planete, când trebuie să evalueze deviaţia gravitaţională a razelor de lumină, când trebuie să descrie fenomenele fizice în punctele de singularitate, când trebuie să genereze modele cosmologice apropiate de observaţiile experimentale. Teoria lui Newton consideră că timpul şi spaţiul sunt absolute, presupune existenţa unui centru al univesului (care de regulă, pentru acurateţea descrierii observaţiilor, este observatorul), faţă de care se raportează distanţele cosmice ale expansiunii universului. Or, de fapt, acest centru al universului nu poate fi stabilit niciunde.

Altminteri am putea pune literalmente Pământul în centrul universului pentru că de aici se fac toate observaţiile şi implicit se calculează toate distanţele. Toate problemele enumerate anterior, pe care teoria lui Newton nu le-a putut rezolva, şi-au găsit rezolvarea în cadrul teoriei relativităţii generalizate.

Intuitiv, gravitaţia einsteiniană poate fi uşor înţeleasă dacă ne imaginăm continuumul spaţio-temporal fizic ca pe o suprafaţă elastică. Orice masă "aşezată" pe această suprafaţă o curbează mai mult sau mai puţin, funcţie de mărimea acesteia. Orice altă masă, mai mică, poate gravita în jurul primei mase, în adâncitura spaţiului deja existentă cu condiţia ca acceleraţia sa centrifugă să fie egală cu acceleraţia centripetă datorată adânciturii, curburii spaţiale. Noţiunea clasică de forţă gravitaţională dispare astfel şi este înlocuită cu cea de curbură spaţială, iar masa inerţială a celui de-al doilea corp este echivalentă cu masa sa gravifică, acceleraţia sa inerţială fiind deja echivalentă cu acceleraţia gravifică (întotdeauna pe spaţii curbe, cum am văzut în exemplul intuitiv prezentat). Acesta este aşa-numitul postulat fundamental al relativităţii generalizate.

La fel stau lucrurile şi în cazul mişcării corpurilor cereşti, în particular al planetelor sistemului nostru solar. Planetele Mercur, Venus, Terra gravitează în adâncitura spaţială creată de masivitatea Soarelui, la fel ca şi celelalte componente ale sistemului nostru solar. Mişcarea lor este perfect descrisă de acest model geometric iar predicţiile lui sunt confirmate de observaţiile experimentale. Legile fizicii sunt aceleaşi şi în sistemul gravitaţional constituit din sistemul nostru solar, la fel de bine ca şi în oricare alt sistem gravitaţional. Această afirmaţie este aşa-numita generalizare a principiului relativităţii restrânse, este principiul relativităţii generalizate. El poate fi formulat astfel: toate sistemele de referinţă neinerţiale sunt echivalente în descrierea legilor naturii. Legea propagării luminii şi principiul cauzalităţii, deşi nu sunt explicit formulate, sunt subînţelese, fiind consecinţe ale principiului relativităţii generalizate. Caracterul euristic al acestui principiu se păstrează şi în cazul sistemelor de referinţă neinerţiale obişnuite (adică la viteze şi energii mici),

principiul relativităţii generalizate fiind un principiu legiferator şi organizator al întregului univers.

Deşi la o primă vedere teoria relativităţii generalizate ca o teorie a gravitaţiei pare o teorie nefizică, geometrică, matematică, prin principiile pe care le conţine ea este profund fizică, fapt confirmat cu prisosinţă de observaţiile experimentale. Curbura spaţială descrie foarte bine mişcarea corpurilor cereşti, multe dintre problemele nesoluţionate ale mecanicii clasice găsindu-şi soluţiile în cadrul său.

I.1.b Invarianţa în timp fizic a constantelor fizice fundamentale

Încercările actuale de a unifica toate cele patru forţe fundamentale au supus fizica unor transformări profunde, de substanţă şi conţinut. În acest sens se înscrie şi înglobarea teoriei relativităţii generalizate în cadrul mecanicii cuantice. O cale de a realiza acest deziderat este elaborarea unui set comun de axiome, baza principială din perspectiva căreia să se poată construi un edificiu teoretic solid. Acesta este motivul pentru care se testează valabilitatea principiilor fundamentale ale teoriei relativităţii generalizate: principiul general al relativităţii şi principiul echivalenţei.

O modalitate globală de a realiza acest lucru este problema, de-acum consacrată, a variaţiei constantelor fundamentale ale naturii. Valabilitatea principiului general al relativităţii se poate testa prin variaţia tuturor constantelor fundamentale ale naturii iar principiul echivalenţei doar prin variaţia constantei atracţiei universale. Deşi primul principiu este şi din acest punct de vedere un principiu general, totuşi se preferă această delimitare.

În genere, constantele fundamentale specifice mecanicii cuantice se folosesc în testarea principiului general al relativităţii. În acest sens o privire generală asupra observaţiilor, de laborator şi astrofizice, se găseşte în [1]. În ce ne priveşte ne vom limita în cele ce urmează la o privire critică asupra variaţiei constantelor fundamentale.

Ce au deci în comun toate aceste experimente? În primul rând multitudinea de valori propuse pentru fiecare constantă fundamentală luată în discuţie, dintre care este foarte greu să discerni măcar un interval de variaţie credibil. Fiecare experiment are rezultatele lui, diferite de ale altui experiment, şi este practic imposibil să afirmăm că unul este mai corect ca altul în lipsa unor criterii comune de evaluare. Găsirea unor asemenea criterii este dacă nu o treabă dificilă atunci imposibilă şi asta pentru că nu există o bază comună de discuţie, în cazul anumitor constante fundamentale, avem două tipuri de observaţii, de laborator şi astrofizice. Apoi ar fi practic imposibil să depistăm şi să diferenţiem erorile de raţionament de cele de măsurare şi de calcul în toată diversitatea lor pentru că acestea pot face întotdeauna foarte uşor abstracţie de pretenţia noastră de obiectivitate. Cât de credibile sunt aşadar aceste rezultate? Greu de spus căruia să-i dăm întâietate.

În această ordine de idei se fac mai multe erori de principiu. Întâi de toate se pierde legătura cu realitatea şi implicit, astfel, fizica devine iar filozofie. De cele mai multe ori constantele fundamentale ale naturii au fost introduse din raţiuni practice, experimentale, ca şi constante de proporţionalitate. Eludarea lor provoacă practic imposibilitatea interpretării experimentelor cantitative. Am avea numai experimente calitative şi un empirism general. Caracterul de ştiinţă exactă este dat numai de stabilirea unor relaţii cauzale (deterministe în cazul relativităţii şi probabiliste în cazul mecanicii cuantice) între mărimile investigate în cadrul experimentului. Acest lucru ar fi imposibil fără a menţine, în cadrul experimental, unele mărimi constante pentru a se observa variaţia altora. O variaţie a tuturor mărimilor ar face practic imposibil de decelat o relaţie de cauzalitate, şi în sens direct şi în sens indirect, implicând alte şi alte experimente concepute după alte principii şi teorii care consideră o variaţie preferenţială a unor mărimi, în vreme ce altele rămân constante. Din punct de vedere logic principiul “legile naturii sunt aceleaşi în orice sistem de referinţă neinerţial, au aceeaşi formă iar mărimile fizice implicate au aceeaşi semnificaţie” se

respectă fie că variază o singură constantă, o singură mărime sau variază toate.

A doua eroare de principiu care se face în invalidarea principiului general al relativităţii prin variaţia constantelor fundamentale este considerarea mecanicii cuantice în cadrul strict al relativităţii generalizate. Constantele mecanicii cuantice variază datorită variaţiei etaloanelor spaţiului şi timpului, care trebuie să rămână constante în teoria relativităţii. Asta e o consecinţă a faptului că între cele două teorii nu există un set de axiome comune. O teorie riguroasă în această direcţie ar trebui să conceapă spaţiul, timpul şi masa ca nişte spaţii interconectate ale căror dimensiuni să fie mărimile şi constantele mecanicii cuantice. Or această teorie încă nu există, după cunoştinţa mea.

A treia eroare de principiu care se face în invalidarea principiului general al relativităţii prin variaţia constantelor fundamentale este ignorarea implicită a principiului cauzalităţii subînţeles în enunţul “viteza luminii este aceeaşi în toate sistemele de referinţă; ea este viteza limită care se întâlneşte în natură”. Principiul general al relativităţii nu are nici un sens fără acest prim principiu al relativităţii speciale. Este de fapt o consecinţă a lui. Nevalabilitatea cauzalităţii ar atrage după sine şi existenţa altor legi ale fizicii în orice sisteme de referinţă dorim, inerţiale sau neinerţiale. În lipsa cauzalităţii, ironia e că nici nu putem stabili acele legi. Nu ar exista nici o certitudine a valabilităţii lor. Toate mărimile ar fluctua haotic, fără nici o noimă, ar apărea fenomene noi, imposibil de corelat cu nişte mărimi fluctuante. În condiţiile în care informaţia pe care o folosim în a ne alimenta teoriile privind variaţia constantelor fundamentale ne parvine cu viteză finită, fie de la aştri, fie din laboratoare, mi se pare un non-sens de a discuta despre invalidarea principiului general al relativităţii. Nimeni nu neagă posibilitatea existenţei vitezelor superluminice, însă nu dispunem decât de viteza luminii pentru a le observa efectele. În această situaţie nu avem decât două opţiuni: ori studiem direct ce se întâmplă cu legile fizicii la viteze superluminice, ori, mai simplu, studiem doar un caz în care viteza luminii este depăşită.

Deoarece valorile măsurate până acum sunt de ordinul erorilor de măsură, deocamdată treaba aceasta pare imposibilă, principiul complexităţii rămâne valabil şi în acest caz. Pe de altă parte, chiar dacă acest fapt ar fi posibil, ne-am bucura degeaba: ieşirea din cauzalitate ne scoate şi din ştiinţă şi ne aruncă cu totul în filozofie: n-am avea acces la informaţii viabile, spaţiul, timpul şi masa măsurate fiind imaginare, în cazul în care am uitat să precizăm în ipotezele de lucru în ce cadru teoretic ne aflăm.

Ultima eroare care se face în invalidarea principiului general al relativităţii prin variaţia constantelor fundamentale este însuşi caracterul paradoxal sau ilogic în care se pune problema. Uneori se admite adevărată teoria relativităţii, în ipoteze, pentru ca în concluzii să rezulte că nu e adevărată. Alteori se admite în ipoteze şi că e adevărată şi că nu e adevărată, pentru ca în concluzii să rezulte că nu e adevărată. Erori tipice care se fac atunci când se încearcă validarea unei teorii prin ea însăşi. Dacă nu respecţi axiomele teoriei înseamnă că nu foloseşti teoria, dacă n-o foloseşti, ce foloseşti în schimb? Ceva ce încerci atunci să formulezi. Ce obţii? Ce te aşteptai. Dar în cadrul cărei teorii? Nu se ştie, căci e în curs de formulare, sau poate, într-o altă teorie formulată deja care nu are altă validare decât cea obţinută de tine. Înseamnă că acea teorie s-a validat? Departe de adevăr. Se intră într-un fel de cerc vicios din care nici măcar ieşirea din cauzalitate nu te mai poate salva. De regulă se lucrează cu teorii care înglobează extrinsec, sau intrinsec, relativitatea şi se doresc o extensiune a ei în domeniul necauzalităţii. Cauzalitatea şi implicit relativitatea se presupun valabile la momentul iniţial, pentru ca la momentul final să nu fie. Se încearcă să se valideze astfel nişte teorii dependente, într-o formă sau alta, de relativitate, ignorându-se rezultatele ei în domeniul necauzal. Corect ar fi fost să se lucreze cu teorii independente de relativitate, aceste teorii să fie validate de alte rezultate, pentru ca mai apoi rezultatele obţinute în privinţa variaţiei constantelor fundamentale să fie credibile. Experimentele amintite anterior mai au comun faptul că pornesc de la nişte premize oarecum paradoxale. Postulează pur şi simplu o modificare complet arbitrară a

unor constante fizice fundamentale şi se aşteaptă apoi, după îndepărtarea tuturor erorilor, să discearnă această modificare în natură. Or, potrivit unei lucrări mai vechi, [2], ar fi absurd să ne aşteptăm ca orice tip de experiment să fie capabil să măsoare aceste consecinţe. În primul rând, fiecare experiment în parte, prin supoziţiile pe care le face, consideră etaloanele de lungime şi timp diferite de cele standard. Pentru că avem de a face cu o problemă care priveşte strict sistemul internaţional de unităţi ar trebui ca un experiment ideal să folosească doar frecvenţa tranziţiei hiperfine a atomilor de cesiu pentru măsurătorile implicând timpul şi lungimea de undă a Kr-86 pentru cele de lungime. Multe dintre experimentele efectuate nu consideră standardele amintite ca standarde de referinţă, ceea ce în principiu nu este corect. Corect pare că este însă faptul că standardele de referinţă se consideră a fi constante. Este aşadar singura modalitate de a rezolva problema. Principial vorbind, dacă dorim să măsurăm o variaţie a unei mărimi trebuie să plecăm de la o valoare fixă a acelei mărimi, calculată după un standard de referinţă. Altminteri nimic nu are sens. Unii autori, [3], au mers puţin mai departe cu această idee. Pentru a măsura variaţiile reale ei susţin că trebuie să comparăm comportamentul unui eveniment faţă de două sau mai multe standarde de referinţă, independente, pentru o acurateţe mai mare a rezultatelor. Să aplicăm această idee în cele ce urmează problemei noastre, dar dintr-o perspectivă mai generală.

Să considerăm două etaloane diferite, de timp şi lungime. Etalonul actual pentru timp este, aşa cum s-a menţionat şi anterior, dat de frecvenţa tranziţiei hiperfine a atomilor de Cs. În constante atomice ea este:

$$\upsilon_1 = m_e \frac{m_e}{m_n} \alpha^2 c^2 \frac{1}{h}$$

(I.1)

unde semnificaţia constantelor fizice fundamentale este binecunoscută.

Analog, standardul de lungime este definit prin lungimea de undă a Kr-86 în apropiere de $\lambda = 60578$ nm. În constante fizice fundamentale este dat de:

$$L_1 = \frac{1}{m_e}\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{c}\hbar$$

(I.2)

Dacă vom considera (I.1) şi (I.2) ca etaloane de timp şi lungime atunci ele ar trebui să fie constante prin definiţie. Este greu de imaginat posibilitatea măsurării unei modificări a constantelor fundamentale care sunt funcţie de timp şi de lungime. De exemplu, nici o modificare a mărimii:

$$\frac{L_1}{T_1} = c\frac{m_e}{m_n}$$

(I.3)

n-ar putea fi măsurată cu standardul nostru; considerând fiecare termen din membrul drept al ecuaţiilor (I.1) şi (I.2) o constantă fizică fundamentală, ne-am putea imagina în (I.3) situaţia în care expresia $L_1 T_1^{-1}$ rămâne constantă ca urmare a variaţiei proporţionale a constantelor m_e / m_n. Ne-am putea întreba atunci ce corelaţie bizară ar putea exista între raportul maselor electronului şi neutronului; am putea crede la un moment dat că am depăşit oarecum cadrul strict al fizicii şi ne jucăm doar cu nişte numere.

În continuare, să ne oprim puţin şi asupra celei de a doua perechi de etaloane de timp şi lungime, necesare bunului curs al ideilor. Suntem, desigur, liberi să alegem orice standarde de timp şi lungime dorim. Vom adopta al doilea etalon de măsurare a timpului frecvenţa Compton a electronului, adică:

$$\upsilon_2 = m_e c^2 \frac{1}{\hbar}$$

(I.4)

Spre deosebire de (I.1) şi (I.2) se observă că această expresie este mai simplă, nu conţine constante sub formă de rapoarte. Acesta reprezintă un avantaj deoarece dacă alegem o expresie care să conţină cam aceleaşi constante, atunci când vom face raportul etaloanelor de lungime şi timp putem obţine o expresie mai simplă decat (I.3), cu care se poate lucra mult mai uşor. În această ordine de idei vom considera etalonul de lungime, raza Bohr a hidrogenului:

$$L_2 = \frac{1}{m_e}\frac{1}{c}\frac{1}{\alpha}h$$

(I.5)

Dacă am face abstracţie de etaloanele (I.1) şi (I.2) atunci etaloanele de referinţă vor fi expresiile (I.4) şi (I.5), ele sunt constante prin definiţie şi ar fi foarte dificil să ne imaginăm o schimbare a mărimii:

$$\frac{L_2}{T_2} = c\frac{1}{\alpha}$$

(I.6)

care să fie rezultatul variaţiei constantelor fizice fundamentale care o compun. Situaţia se schimbă însă dacă vom încerca să comparăm etaloane de acelaşi fel ca să vedem în ce mod pot varia ele funcţie de constantele fundamentale la care se raportează. Cel mai convenabil ar fi să considerăm expresia cea mai simplă:

$$\frac{L_2}{L_1} = \alpha$$

(I.7)

Se observă că acum se poate imagina foarte uşor o variaţie a constantei de structură fină în condiţiile în care un etalon de lungime rămâne fix, de referinţă, iar celălalt ar varia invers proporţional cu variaţia constantei de structură fină.

Astfel ar sta lucrurile în cazul considerat anterior. Ar putea exista raţionamente în care ar apărea variaţia unor constante fizice fundamentale. Totuşi, în practică, din raţiuni experimentale, ar trebui să punem problema puţin altfel. Este evident că în reperele noastre spaţio-temporale (I.3) şi (I.6) lipseşte ceva. Acel ceva este însăşi condiţia de măsurabilitate care este proprie şi mecanicii cuantice, nu numai teoriei relativităţii. Timpul şi spaţiul se măsoară numai unul prin celălalt. Nu putem să ne imaginăm un experiment în care acestea să se măsoare simultan. Ele se măsoară unul prin celălalt cu condiţia ca viteza să fie cunoscută şi constantă. Timpul fizic, aşa cum îl ştim noi este doar o măsură a mişcării într-un spaţiu oarecare cu o viteză cunoscută. Pe de cealaltă parte, spaţiul nu poate fi măsurat prin intermediul energiei mişcării decât prin

intermediul duratei mişcării. Prin urmare, pentru ca reperele noastre de spaţiu şi timp (I.3) şi (I.6) să fie operaţionale din punct de vedere experimental ar mai trebui să avem şi o condiţie de măsurabilitate, definită de:

$$\frac{nL}{pT} = c$$

(I.8)

unde n şi p, numere reale, pozitive, ne sunt necesare pentru a obţine multiplii lungimilor şi timpilor elementari care sunt determinaţi în experimente. Viteza c este cunoscută, altminteri n-am mai putea face nici o determinare experimentală, este o viteză limită, viteza cu care se deplasează lumina. Bineînţeles, relaţia (I.8) trebuie înţeleasă doar din raţiuni practice. O interpretare directă ar genera nişte absurdităţi: este limpede că raza Bohr a hidrogenului nu se măsoară prin frecvenţa Compton a electronului, ca să dăm doar un exemplu. În practică nu se folosesc decât multipli ai acestor etaloane şi nici nu interesează de unde provin, interesează doar să fie exacte. Apoi, viteze mai mici ca viteza luminii sunt specifice mecanicii clasice, pe când în cadrul observaţiilor astrofizice se foloseşte doar informaţia care ne parvine aici, pe Pământ, cu viteza luminii, o viteză specifică teoriilor cuantice de câmp.

Aşa încât avem acum cadrul principial în care să putem reconsidera problema noastră. Este evident că dacă se ţine seama de (I.8) atunci în relaţia (I.6), deoarece c este fixată, nu se poate conchide decât ca α este o constantă. Orice variaţie a ei, într-un cadru temporal fizic, este nulă. Dacă ţinem seama de acest rezultat intermediar, foarte important şi considerăm acum relaţia (I.3), ţinând desigur seama şi de (I.8), rezultă şi că raportul dintre masa electronului şi masa neutronului este o constantă.

Acum, dacă aplicăm o variaţie relaţiei:

$$L_2 = \alpha L_1$$

(I.7’)

şi ţinem seama că variaţia constantei de structură fină este zero atunci vom avea:

$$\delta L_2 = \alpha \delta L_1$$

(I.9)

Dacă aplicăm acum o variaţie relaţiei (I.7), va rezulta după un calcul elementar:

$$L_1 \delta L_2 - L_2 \delta L_1 = 0$$

(I.10)

Din (I.9) şi (I.10) rezultă:

$$\delta L_1 (\alpha L_1 - L_2) = 0$$

(I.11)

de unde rezultă clar invariabilitatea etalonului de lungime (I.2). Acest rezultat, introdus în relaţia (I.10) are drept consecinţă invariabilitatea etalonului de lungime (I.5). Şi nu în ultimul rând, din invariabilitatea etalonului de lungime (I.2) se poate deduce foarte uşor că variaţiile constantei lui Planck şi a masei electronului sunt simultan nule. În final putem conchide că variaţiile tuturor constantelor fizice cuprinse în (I.1), (I.2), (I.4) şi (I.5) sunt simultan nule dacă şi numai dacă se pune condiţia de măsurabilitate (I.8).

Considerarea timpului fizic este necesară întotdeauna din raţiuni experimentale. Ce măsurăm noi în toate cazurile este timp fizic. Desigur, trebuie să se facă distincţia între universul macroscopic şi cel microscopic. În universul macroscopic timpul fizic nu este legat neapărat de viteza luminii decât în măsura în care observaţiile astrofizice care ne parvin de la mare distanţă călătoresc prin spaţiu cu viteza, fixă, a luminii. În momentul când facem măsuratori determinăm ori frecvenţa luminii ori lungimea ei de undă. Pentru că nu le putem măsura simultan pe amândouă în cadrul aceluiaşi experiment suntem practic obligaţi să menţinem viteza luminii constantă. Ce am măsurat noi, prin simplul motiv că viteza luminii este constantă, nu ne poate da în nici un caz o variaţie a unor constante fizice fundamentale deoarece am presupus implicit că suntem într-un reper temporal fizic. Din acest motiv, credem noi, toate rezultatele privitoare la variaţia unor constante fizice fundamentale obţinute în urma unor observaţii astrofizice sunt eronate. În cadrul unui singur experiment este imposibil să discerni mai mult de o singură variaţie a unei mărimi fizice din ecuaţia care leagă frecvenţa luminii de

lungimea ei de undă şi viteza luminii. Cealaltă variaţie se calculează menţinând constantă a treia mărime. Iar această a treia mărime, într-un reper de timp fizic este doar viteza. Altminteri nu mai putem avea un reper de timp fizic ci altceva, nu mai avem un cadru spaţio-temporal de discuţie ci unul spaţiu-viteză sau viteză-timp. Dar noi lucrăm strict pe un cadru spaţiu-timp fizic. Prin urmare în experimentele legate de variaţia unor constante fizice fundamentale viteza cu care se deplasează lumina este un adevăr ultim.

Din raţionamentele precedente se vede clar şi necesitatea unicităţii timpului fizic. Dacă am avea mai multe repere de timp fizic, şi ec. (I.1) şi ec. (I.4), la fel de bine şi oricare alt reper de timp, şi nu ar exista nici un criteriu de unificare al lor, practic această situaţie ar permite crearea unor raţionamente care ar avea drept consecinţă variaţia cu timpul (care timp?) a unor constante fizice fundamentale. Ar fi până la urmă o babilonie, nici o relaţie cantitativă n-ar mai fi valabilă, însăşi fizica n-ar putea exista aşa cum o ştim astăzi ca să poată servi drept bază de comparaţie celor care doresc să o modifice nemodificându-i însă fundamentele.

Existenţa unui cadru temporal unic însă, pune ordine în toate. Ecuaţiile îşi păstrează forma iar mărimile fizice conţinute semnificaţia, indiferent de reperul de timp fizic în care se lucrează. Viteza luminii este o constantă, ştim exact ce măsurăm, timpul sau spaţiul şi suntem îndreptăţiţi să folosim sistemul actual de unităţi. Acesta este nu întâmplător legat de spaţiu şi timp şi nu de viteză şi timp sau de viteză şi spaţiu, întrucât unităţile de măsură pentru viteză sunt reductibile la cele de spaţiu şi timp. Prin urmare o modificare a fizicii în sensul variaţiei unor constante fundamentale s-ar resimţi practic şi prin necesitatea adoptării altor unităţi de măsură.

Situându-ne într-un reper de timp fizic se presupune implicit invariabilitatea vitezei luminii. Această invariabilitate atrage după sine invariabilitatea celorlalte constante amintite anterior[1]. Se poate generaliza astfel această idée la toate constantele fizice fundamentale[2] şi păstrarea semnificaţiilor fizice ale mărimilor tuturor ecuaţiilor. Deci, este ca şi cum am spune că legea

propagării vitezei luminii din relativitate este valabil în toată fizica, deoarece fizica există în forma ei actuală datorită acestei legi. Ce decurge din această lege, principiul general al relativităţii [4], aidoma. Prin urmare această lege are valoare de principiu şi este mai importantă decât principiul relativităţii[3]. În teoria relativităţii se consideră invers, că legea derivă din principiu. Dar din cele expuse anterior am văzut că se poate concepe principiul propagării luminii ca un principiu fundamental din care să decurgă principiul relativităţii. Principiul cauzalităţii, care la fel decurge din invariabilitatea vitezei luminii, este de asemenea valabil în toată fizica. Nu putem avea experimente calitative şi cantitative fără principiul cauzalităţii. Nu putem măsura de fapt nimic. Nu putem obţine nici o relaţie cantitativă între mărimile fizice implicate în experiment dacă nu suntem într-un timp fizic. Prin urmare principiile relativităţii nu sunt specifice doar relativităţii ci întregii fizici, implicit mecanicii cuantice, în măsura, mai mică sau mai mare, în care sunt legate de caracterul determinist-probabilistic al rezultatelor sale. Dacă vrem să inventăm o altă fizică ar trebui să renunţăm întâi la reperele de timp fizic, ceea ce, din cele văzute anterior, pare deocamdată imposibil şi lipsit de sens.

Necesitatea introducerii timpului fizic este deci o chestiune principială. Întâi de toate, timpul fizic este timpul sub care toate celelalte posibile repere de timp sunt unificate. Şi, în cele din urmă, fără timpul fizic, timpul şi spaţiul nu se mai pot măsura unul prin celălalt, ne aflăm într-un alt cadru decât unul fizic, iar măsurătorile pe care le facem sunt îndoielnice, [5].

I.2 Confirmări experimentale ale teoriei relativităţii generalizate

I.2.a Avansul de periheliu

Pentru a studia mişcarea unei mase mici în vecinătatea unei mase centrale mari, în teoria relativităţii trebuie să rezolvăm ecuaţiile lui Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

unde $R_{\mu\nu}$ este tensorul de curbură, $g_{\mu\nu}$ tensorul metric fundamental, R reprezintă curbura scalară a spaţiului şi $T_{\mu\nu}$ tensorul energie-impuls.

Detalierea acestor ecuaţii conduce la un sistem de 10 ecuaţii care prin rezolvare ne dau rezultatul căutat. Pentru cazul nostru soluţia ecuaţiilor lui Einstein este descrisă de metrica Schwartzshild:

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Pentru a obţine ecuaţia traiectoriilor din această metrică trebuie indeplinită condiţia:

$$\delta \int ds = 0$$

Din această condiţie se pot deduce cele 3 ecuaţii ale lui Euler, relativ la cele 3 variabile dependente de timp: r, θ şi φ. Aceste 3 ecuaţii formează un sistem de ecuaţii de ordinul 2 care reprezintă ecuaţiile de mişcare analoge celor din teoria clasică:

$u = x, y, z$

Această cale pare mai dificilă, motiv pentru care se porneşte de la o determinare mai simplă a condiţiei de minim din care se vor obţine ecuaţiile traiectoriilor:

$$\delta \int \left[\left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \right] ds = 0$$

De aici este foarte evidentă integrala primă:

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{ds} = cons.$$

din care mişcarea se simplifică, reducându-se la o mişcare plană. În condiţiile în care avem simetrie sferică rezultă că φ=const.

În plan, r şi θ sunt coordonate polare şi condiţia se mai poate scrie:

$$\delta \int \left[\left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 \right] ds = 0$$

De aici rezultă ecuaţiile lui Euler corespunzătoare:

$$\left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right) \frac{dt}{ds} = A = cons.$$

(I.12)

şi:

$$cr^2 \frac{d\theta}{ds} = B = cons.$$

(I.13)

unde A şi B sunt constante arbitrare. Metrica în acest caz s-ar putea scrie sintetic:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = c^2 - v^2 = c^2 - r'^2 - r^2\theta'^2$$

unde v este viteza în sens classic.

Împărţind ecuaţiile (I.12) şi (I.13) vom obţine ecuaţia:

$$r^2\theta' = \frac{B}{cA} \left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right)$$

(I.14)

care este echivalentul relativist al integralei ariilor în mecanica newtoniană.

Pe de altă parte ridicând ecuaţia (I.12) la pătrat rezultă:

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right)^2 \left(\frac{dt}{A} \right)^2$$

Deci metrica se mai poate scrie:

$$\left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right)^2 \left(\frac{dt}{A} \right)^2 = \left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} - r^2 d\theta^2$$

sau împărţind la dt:

$$\frac{1}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = c^2 - \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{c^2 - \frac{2\mu}{r}}{A} \right)^2$$

Dar al doilea termen din stânga ecuaţiei poate fi înlocuit cu ecuaţia (I.14) ridicată la pătrat:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(c^2 - \frac{2\mu}{r}\right)^2$$

operaţie după care ecuaţia de mişcare va fi:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(c^2 - \frac{2\mu}{r}\right)^2 = c^2 - \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{c^2 - \frac{2\mu}{r}}{A}\right)^2$$

Atât r cât şi θ sunt variabile dependente de timp. Deci putem scrie:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

care se transformă, ţinând cont de ecuaţia (I.14) ridicată la pătrat, în:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(c^2 - \frac{2\mu}{r}\right)^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Însă:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$$

şi atunci ecuaţia traiectoriei va fi:

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(c^2 - \frac{2\mu}{r}\right)^2\frac{1}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} = c^2 - \frac{2\mu}{r} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(c^2 - \frac{2\mu}{r}\right)^2 - \left(\frac{c^2 - \frac{2\mu}{r}}{A}\right)^2$$

Efectuând operaţiile evidente, simplificarea termenului din stânga, împărţirea prin ultima paranteză din stânga, împărţirea prin pătratul vitezei luminii şi desfacerea ultimei paranteze din dreapta, va rezulta:

$$\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2 r^2}\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(c^2 - \frac{2\mu}{r}\right) - \frac{1}{A^2} + \frac{2\mu}{c^2 A^2}\frac{1}{r}$$

După care, rearanjând termenii să obţinem:

$$\left(\frac{B}{cA}\right)^2\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2=\frac{A^2-c^2}{c^2A^2}+\frac{2\mu}{c^2A^2}\frac{1}{r}-\left(\frac{B}{cA}\right)^2\frac{1}{r^2}+\frac{2\mu}{c^2}\left(\frac{B}{cA}\right)^2\frac{1}{r^3}$$

Pentru ca, după împărţirea ecuaţiei la raportul constantelor să rezulte în final ecuaţia traiectoriei:

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2=\frac{2\mu}{c^2}\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2}+\frac{2\mu}{B^2}\frac{1}{r}+\frac{A^2-c^2}{B^2}$$

După cum se va vedea, în teoria clasică ecuaţia echivalentă a traiectoriei este o ecuaţie de grad 2 în 1/r, în vreme ce aici avem o ecuaţie de grad 3. Pentru a o rezolva avem nevoie de schimbarea de variabilă:

$$\frac{1}{r}=q$$

Notăm:

$$P(q)=\frac{2\mu}{c^2}q^3-q^2+\frac{2\mu}{B^2}q+\frac{A^2-c^2}{B^2}$$

după care ecuaţia traiectoriei devine:

$$\left(\frac{dq}{d\theta}\right)^2=P(q)$$

Putem integra riguros această ecuaţie înlocuind variabila q cu funcţia eliptică σ a lui Weierstrass, care satisface ecuaţia:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2=4\sigma^3-g_2\sigma-g_3$$

unde coeficienţii g sunt nişte constante, dar putem rezolva ecuaţia diferenţială a traiectoriei mai simplu, printr-o aproximaţie.

Ca atare, putem spune că soluţiile căutate sunt de forma:

$$\theta=\pm\int\frac{dq}{(P(q))^{\frac{1}{2}}}+cons.$$

fără a ne abate prea mult de la rigurozitate.

Fie r_0 o valoare iniţială în jurul căreia există soluţia căutată r. Aceasta poate lua o valoare maximă şi una minimă corespunzatoare:

$$\alpha = \frac{1}{a(1+e)} \qquad \beta = \frac{1}{a(1-e)}$$

Ca atare vom avea:

$$P(q) = \frac{2\mu}{c^2}(q-\alpha)(\beta-q)(\gamma-q)$$

În teoria clasică, după cum se va vedea, afeliul şi periheliul sunt fixe, dar în teoria relativităţii acestea sunt variabile. Avansul de periheliu se calculează cu formula:

$$\delta\varpi = 2\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dq}{P(q)} - 2\pi$$

cantitate care măsoară abaterea traiectoriei de la forma iniţială.

În continuare, pentru uşurarea calculelor, se face schimbarea de variabilă:

$$q = \frac{1+e\cos\omega}{a(1-e^2)}$$

Cu această nouă variabilă calculăm:

$$q-\alpha = \frac{e(1+\cos\omega)}{a(1-e^2)}$$

şi:

$$\beta - q = \frac{e(1-\cos\omega)}{a(1-e^2)}$$

în ideea de a arăta că:

$$\left[(q-\alpha)(\beta-q)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{e\sin\omega}{a(1-e^2)}$$

poate fi legată de relaţia:

$$dq = -\frac{e\sin\omega\, d\omega}{a(1-e^2)}$$

Într-adevăr, ţinând seama de ultimile două relaţii se observă că:

$$\frac{dq}{[(q-\alpha)(\beta-q)]^{\frac{1}{2}}} = -d\omega$$

În aceste condiţii integrala noastră va avea o formă mult mai simplă, şi anume:

$$\delta\varpi = 2\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\left[\frac{2\mu}{c^2}(\gamma - q)\right]^{\frac{1}{2}}} - 2\pi$$

Din relaţiile lui Viete se poate deduce că:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{c^2}{2\mu}$$

fapt ce ar atrage după sine:

$$\gamma - q = \frac{c^2}{2\mu} - \alpha - \beta - q = \frac{c^2}{2\mu} - \frac{2}{a(1-e^2)} - \frac{1+e\cos\omega}{a(1-e^2)}$$

urmând ca după efectuarea înmulţirilor expresia avansului de periheliu să devină:

$$\delta\varpi = 2\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\left[1 - \frac{6\mu}{c^2 a(1-e^2)} - \frac{2\mu e\cos\omega}{c^2 a(1-e^2)}\right]^{\frac{1}{2}}} - 2\pi$$

La valori mici ale rapoartelor de sub radical se poate face aproximaţia:

$$(1-s)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{s}{2}$$

Ţinând cont de această observaţie şi efectuând apoi integrala vom avea:

$$\delta\varpi = 2\int_0^{\pi}\left[1 + \frac{3\mu}{c^2 a(1-e^2)} + \frac{\mu e\cos\omega}{c^2 a(1-e^2)}\right] d\omega - 2\pi = \frac{6\pi\mu}{c^2 a(1-e^2)}$$

Pe baza acestei formule s-a stabilit ulterior că valoarea teoretică a avansului de periheliu al planetei Mercur este de 43’’, fapt confirmat de observaţiile experimentale. Teoria clasică nu poate stabili acest avans de periheliu, aşa încât acesta a fost primul test al teoriei relativităţii generalizate care a impus-o lumii ştiinţifice ca fiind o teorie mai completă a gravitaţiei.

I.2.b Deviaţia razelor luminoase în câmp gravitaţional

În teoria relativităţii mişcarea unei mase mici în vecinătatea unei mase centrale, mari, este descrisă de metrica Schwartzshild. Această aproximaţie se poate folosi şi în cazul unei mase infinitezimale, în speţă masa unor fotoni dintr-un fascicul luminos, deoarece la infinit ecuaţiile rezultate descriu traiectoria curbilinie a fasciculului având o rază foarte mare.
Invariantul Schwartzshild este:

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2\mu}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

iar de-a lungul geodezicelor care vor rezulta acesta este nul.

Aşa cum am văzut în subcapitolul precedent, ecuaţia diferenţiala care descrie traiectoria particulei infinitezimale în vecinătatea masei centrale, mari, dedusă din metrica Schwartzshild este:

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu}{c^2} \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu}{B^2} \frac{1}{r} + \frac{A^2 - c^2}{B^2}$$

Traiectoriile descrise de această ecuaţie depind de 3 parametri: unghiul polar θ şi cele două constante arbitrare A şi B.

Problema care apare aici este de fapt: între ce valori trebuie să varieze aceste constante arbitrare pentru a obţine traiectoria fasciculului luminos. Una din integralele prime care se deduc din metrică, aşa cum s-a văzut în subcapitolul precedent, este:

$$cr^2 \frac{d\theta}{ds} = B = const.$$

din care dacă ds tinde la zero atunci constanta B va tinde la infinit. Din această observaţie importantă rezultă că în ecuaţia diferenţială a traiectoriilor termenul corespunzător lui 1/r va tinde la zero.
Termenul liber nu se anulează însă (A este nedeterminată) şi pentru a fi consecvenţi cu aceasta trebuie să considerăm contribuţia lui printr-o constantă arbitrară, dar de valoare mică.

Prin urmare ecuaţia diferenţială a traiectoriilor va fi exprimată printr-un polinom de gradul 3 în 1/r având forma:

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu}{c^2} \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2} + D$$

unde D este o constantă arbitrară, de valoare mică.

Dacă facem schimbarea de variabilă:

$$\frac{1}{r} = q$$

vom obţine:

$$P(q) = \frac{2\mu}{c^2} q^3 - q^2 + D$$

iar ecuaţia noastră devine:

$$\left(\frac{dq}{d\theta} \right)^2 = P(q)$$

Putem integra riguros această ecuaţie prin reducerea variabilei q la funcţia σ a lui Weierstrass, însă e mai simplu să aproximăm rezultatul printr-o metodă mai directă.

Să considerăm că raza foarte mare a traiectoriei fasciculului luminos este R. În ecuaţia noastră diferenţială considerăm că valorii q=1/R îi este asociată o rădăcină a polinomului P(q)=0. Deci vom avea:

$$P(q) = \frac{2\mu}{c^2} q^3 - q^2 + \frac{1}{R^2} - \frac{2\mu}{c^2 R^3}$$

O soluţie a acestei ecuaţii diferenţiale va fi, prin urmare, de forma primitivei:

$$\theta = \pm \int \frac{dq}{(P(q))^{\frac{1}{2}}} + const.$$

Dacă vom considera μ ca fiind variabilă şi această variabilă se anulează, atunci:

$$\theta = \pm \int \frac{dq}{\left(\frac{1}{R^2} - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + const. = \arccos Rq + \theta_0$$

din care rezultă:

$$Rq = \cos(\theta - \theta_0)$$

şi:

$$r = \frac{R}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

fasciculul luminos se reduce la o linie dreaptă, tangentă la Soare, precum se consideră în teoria clasică.

Din derivarea ecuaţiei diferenţiale a traiectoriei obţinem:

$$\frac{d^2 q}{d\theta^2} + q - \frac{3\mu}{c^2} q^2 = 0$$

În această ecuaţie, dacă μ ar fi pozitiv atunci fasciculul luminos ar fi concav (pentru că derivata a doua ar fi pozitivă).

Să considerăm acum o axă de simetrie care uneşte centrul globului solar, imaginar, de punctul de contact cu fasciculul luminos. În relaţia:

$$\theta = \int_q^{\frac{1}{R}} \frac{dq}{\left[\frac{1}{R^2} - q^2 - \frac{2\mu}{c^2}\left(\frac{1}{R^3} - q^3\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

dacă θ creşte în vreme ce q este pozitiv, polinomul de la numitor este negativ, radicalul fiind nedefinit. Dacă q tinde la zero atunci θ va tinde la o valoare finită ψ, fasciculul luminos va tinde deci la o direcţie asimptotică, mai mare decât π/2 .

Pentru că fasciculul luminos este simetric faţă de axa de simetrie ce uneşte centrul globului solar de punctul de contact şi este concav rezultă că arcul total astfel construit formează o curbă asemănătoare unei hiperbole. Deviaţia gravitaţională a fasciculului luminos va fi prin urmare:

$$\Delta = 2\int_0^{\frac{1}{R}} \frac{dq}{\left[\frac{1}{R^2} - q^2 - \frac{2\mu}{c^2}\left(\frac{1}{R^3} - q^3\right)\right]^{\frac{1}{2}}} - \pi$$

Pentru a calcula mai uşor valoarea acestei integrale se face schimbarea de variabilă:

$$q=\frac{\cos\upsilon}{R}$$

De aici rezultă că:

$$dq=-\frac{\sin\omega d\upsilon}{R} \qquad \text{şi} \qquad \frac{1}{R^2}-q^2=\frac{\sin^2\omega}{R^2}$$

Iar integrala devine:

$$\Delta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\upsilon}{\left[1-\frac{2\mu}{c^2R}\frac{1-\cos^3\omega}{1-\cos^2\omega}\right]^{\frac{1}{2}}}-\pi$$

Deoarece:

$$(1-\cos\upsilon)(1+\cos\upsilon+\cos^2\omega)=1-\cos^3\omega$$

fracţia de la numitor se va reduce la:

$$\frac{1-\cos^3\omega}{1-\cos^2\omega}=\frac{1+\cos\upsilon+\cos^2\omega}{1+\cos\upsilon}=\frac{1+\cos\upsilon(1+\cos\upsilon)}{1+\cos\upsilon}=$$

$$\frac{1}{1+\cos\upsilon}+\cos\upsilon=\frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}+\cos\upsilon$$

Cu aceste rezultate intermediare şi ţinând seama de faptul că pentru valori mici ale cantităţilor de sub radical este valabilă aproximaţia:

$$(1-s)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{s}{2}$$

integrala noastră va deveni:

$$\Delta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\frac{\mu}{c^2R}\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}+\cos\upsilon\right)\right]d\upsilon-\pi$$

Primitiva funcţiilor trigonometrice din paranteză este:

$$\int\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}+\cos\upsilon\right)d\upsilon=tg\frac{\omega}{2}+\sin\omega+cons.$$

rezultat cu care se calculează valoarea deviaţiei gravitaţionale ca fiind:

$$\Delta = \frac{4\mu}{c^2 R}$$

După cum se va vedea ulterior, valoarea teoretică a acestei deviaţii este dublă faţă de valoarea teoretică obţinută cu teoria clasică, fapt confirmat experimental de către fizicianul britanic A. Eddington în urma eclipsei totale de Soare din anul 1919.

În practică, această deviere se măsoară comparând observaţiile unor stele îndepărtate în timpul unor eclipse totale de Soare cu unele observaţii făcute în timpul nopţii. Diferenţele infime de poziţie ale stelelor respective reprezintă în fapt valoarea deviaţiei fasciculelor luminoase în câmpul gravitaţional al Soarelui. Între valorile experimentale şi cele teoretice, calculate cu formula dedusă anterior, există o foarte bună corespondenţă.

I.2.c Retardarea gravitaţională a undelor electromagnetice

Un grup de fizicieni de la MIT, condus de către prof. I. Shapiro au imaginat şi pus în practică, în anii 1966-1967, un alt test al teoriei relativităţii generalizate. Ei au folosit un raţionament simplu şi anume: în absenţa unui corp masiv interpus între două planete, distanţa dintre ele, măsurată cu un radar puternic nu este defel influienţată gravitaţional; prezenţa unui corp masiv interpus între aceleaşi planete va schimba însă situaţia, această distanţă, măsurată la fel, ar fi influienţată de câmpul gravitaţional al corpului masiv.

Aplicată la o situaţie concretă, la distanţele dintre Terra şi Mercur, dintre Terra şi Venus, rezultatele au confirmat aşteptările. În prezenţa Soarelui durata de propagare, dus-întors, a semnalului radar a fost mai mare decât în absenţa lui, la conjuncţiile superioare (alinierea planetei, Soarelui şi Pământului) ale planetelor Mercur şi Venus, pe de o parte, Soarelui şi Pământului, de cealaltă parte.

În absenţa Soarelui durata de trecere a semnalului va fi:

$$T_1 = \frac{1}{c} \int_{R_1}^{R_2} dl$$

unde R_1 reprezintă distanţa de la Soare la Mercur sau Venus, depinde de alegerea sistemului de referinţă; R_2 este distanţa dintre Soare şi Pământ.

În prezenţa Soarelui (semnalul se propagă aproximativ tangent la suprafaţa solară) durata corespunzătoare aceleiaşi distanţe este modificată după cum urmează:

$$T_2 = \frac{1}{c} \int_{R_1}^{R_2} n dl \qquad T_2 > T_1$$

unde n reprezintă, prin analogie cu optica geometrică, un indice de refracţie gravitaţional. În optică, drumul optic este distanţa reală înmulţită cu indicele de refracţie. Această analogie funcţionează şi în cazul unei devieri de la traiectoria dreaptă, datorată câmpului gravitaţional.

În teoria relativităţii generalizate indicele de refracţie gravitaţional este dat de expresia:

$$n = e^{\frac{\alpha}{r}}$$

unde $\alpha = 2\frac{GM}{c^2}$ sau $\alpha = \frac{2\mu}{c^2}$.

Deoarece în genere α are valori mici, exponenţiala poate fi dezvoltată în serie Taylor, expresia indicelui de refracţie gravitaţional modificându-se corespunzător:

$$n = 1 + 2\frac{GM}{c^2 r} + \ldots$$

Ţinându-se cont de aceste considerente retardarea gravitaţionala a semnalului va fi :

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int_{R_1}^{R_2} (n - 1) dl \approx 2\frac{GM}{c^3} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dl}{r}$$

Pentru ca efectul întârzierii să fie maxim trebuie ca semnalul să se propage tangent la suprafaţa Soarelui. În aceste condiţii vom avea:

$$r^2 = R^2 + l^2$$

unde R este raza Soarelui.

Corespunzător, expresia retardării devine:

$$\Delta T = 2\frac{GM}{c^3}\int_{-R_1}^{R_2}\frac{dl}{(R^2+l^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\frac{GM}{c^3}\ln\frac{(R^2+R_2^2)^{\frac{1}{2}}+R_2}{(R^2+R_1^2)^{\frac{1}{2}}-R_1}$$

Însă:

$$\frac{(R^2+R_2^2)^{\frac{1}{2}}+R_2}{(R^2+R_1^2)^{\frac{1}{2}}-R_1}\cdot\frac{(R^2+R_1^2)^{\frac{1}{2}}+R_1}{(R^2+R_1^2)^{\frac{1}{2}}+R_1} = \left[\frac{R_2}{R}+\left(1+\frac{R_2^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\frac{R_1}{R}+\left(1+\frac{R_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \approx 4\frac{R_1R_2}{R^2}$$

Ceea ce înseamnă că:

$$\Delta T \approx 2\frac{\mu}{c^3}\ln\left(4\frac{R_1R_2}{R^2}\right)$$

unde $\mu = GM$.

Cu această formulă prezicerile teoriei relativităţii generalizate au fost încă o dată confirmate. Experimente ulterioare, efectuate în anul 1971, au mărit precizia cu care se confirmă acest test la 1%.

I.2.d Deplasarea spre roşu a liniilor spectrale în câmp gravitaţional

Dacă lumina emisă de către un corp cosmic se propagă în drumul ei către observatorul terestru prin câmpul gravitaţional al emiţătorului, şi acest câmp gravitaţional este intens, atunci în punctul de observaţie se va înregistra o deplasare spre roşu a liniilor spectrale ale acestei radiaţii, având drept cauză energia gravitaţională care o produce:

$$h(\upsilon_r - \upsilon_e) = m(\Phi_r - \Phi_e)$$

unde indicii r şi e reprezintă receptorul şi emiţătorul, Φ_r fiind potenţialul gravitaţional al receptorului (respectiv al Pământului) şi Φ_e potenţialul gravitaţional al emiţătorului. Diferenţa din primul termen al ecuaţiei anterioare

reprezintă tocmai energia radiaţiei luminoase pierdute din cauza propagării prin câmpul gravitaţional.

Dacă împărţim ecuaţia la pătratul vitezei luminii şi aducem masa m în primul termen vom avea:

$$h(\upsilon_r - \upsilon_e)\frac{1}{mc^2} = (\Phi_r - \Phi_e)\frac{1}{c^2}$$

Dar:

$$mc^2 = h\upsilon_r$$

reprezintă energia radiativă măsurată la receptor. Ţinând seama de această expresie ecuaţia noastră devine:

$$\frac{\upsilon_r - \upsilon_e}{\upsilon_r} = \frac{\Phi_r - \Phi_e}{c^2}$$

Având în vedere faptul că propagarea luminii poate fi descrisă de ecuaţia simplă:

$$c = \lambda\upsilon$$

ecuaţia noastră devine:

$$\frac{\lambda_e - \lambda_r}{\lambda_e} = \frac{\Phi_r - \Phi_e}{c^2}$$

Adică, mai clar:

$$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Phi_r - \Phi_e}{c^2}$$

În genere, efectul deplasării liniilor spectrale spre roşu datorită câmpurilor gravitaţionale se face când câmpul emiţătorului este mult mai însemnat comparativ cu câmpul gravitaţional al receptorului (în cazul nostru Terra). Deci acest efect va avea valori notabile doar în cazul unor emiţători masivi, cum ar fi: quasarii, stelele neutronice, piticele albe etc.:

$$\Phi_e >> \Phi_r$$

Deplasarea liniilor spectrale va deveni, după ce am operat reducerea de rigoare:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Phi_e}{c^2}$$

Expresia potenţialului gravitaţional al emiţătorului este binecunoscută:

$$\Phi_e = \frac{\mu}{r} = \frac{GM}{r}$$

Atunci, deplasarea liniilor spectrale va fi:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\mu}{c^2 r} = \frac{GM}{c^2 r}$$

Dacă introducem raza gravitaţională (Schwartzschild), care este o constantă pentru fiecare stea în parte, vom avea:

$$r_g = 2\frac{GM}{c^2}$$

iar expresia deplasării liniilor spectrale se va putea scrie:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{r_g}{r}$$

Pentru Soare, $r_g = 2{,}95 \cdot 10^3\, m$ şi $r = 0{,}696 \cdot 10^9\, m$, este imposibil de separat acest efect ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2{,}12 \cdot 10^{-6}$) de efectul Doppler datorat deplasării orbitale a Pământului în jurul astrului său central (care este mai mare decât valoarea anterioară).

Cele două efecte se pot însă evidenţia pentru stelele sau formaţiunile stelare foarte masive, aşa cum s-a menţionat anterior, în cursul deducerii formulei deplasării liniilor spectrale. De exemplu, în cazul stelei Sirius B, o pitică albă, valoarea teoretică a deplasării $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 10^{-4}$ s-a confirmat şi în cazul observaţiilor experimentale. Există multe exemple în literatura de specialitate în acest sens. Astfel, s-a evidenţiat existenţa deplasării gravitaţionale a liniilor spectrale către roşu şi acest fapt constituie unul din cele mai importante teste ale teoriei relativităţii generalizate, deoarece nu are analog newtonian[4].

Expresia deplasării liniilor spectrale poate fi utilizată în practică pentru măsurarea maselor corpurilor cereşti masive, determinându-se întâi deplasarea către roşu şi distanţele până la ele. Acest efect este cu atât mai important cu cât masa corpului emiţător este mai mare.

I.3 Posibile teste ale teoriei relativităţii generalizate

I.3.a Undele gravitaţionale

O posibilă confirmare a teriei relativităţii generalizate este observarea existenţei undelor gravitaţionale. Teoria le postulează, însă observaţional nu s-au pus niciodată în evidenţă. În principiu, o undă gravitaţională reprezintă o ondulare a continuumului spaţio-temporal care se propagă la fel ca oricare undă în mediul ei de propagare, în cazul în discuţie spaţiul-timpul. Din moment ce orice masă curbează spaţiul şi timpul, atunci orice translaţie a masei are drept consecinţă o deplasare a curburii spaţiului şi timpului în direcţia de deplasare a masei. Propagarea acestei deplasări, din aproape în aproape, pe direcţia deplasării masei, după ce această deplasare a încetat, poate fi o reprezentare intuitivă a ceea ce ar fi o undă gravitaţională. Cu excepţia că viteza de deplasare a perturbaţiei nu ar fi de ordinul vitezei de deplasare a masei, ci de ordinul de mărime al vitezei luminii, iar perturbaţia în sine s-ar deplasa în tot spaţiul. Această reprezentare mentală simplă a conceptului de undă gravitaţională ar putea fi tradusă în ceva ce se poate observa cu mijloacele tehnice de care dispunem la ora actuală. Lucrările prof. Weber, din 1965, sunt elocvente în acest sens. El a încercat să surprindă ondularea în propagare liberă, care este o undă gravitaţională, în modificarea structurii cristaline a unei mostre experimentale. Această modificare, credea el, poate fi observată indirect, prin modificarea distanţelor interatomice şi implicit prin modificarea proprietăţilor electrice ale materialului. În principiu orice distanţă spaţială se schimbă odată cu trecerea unei ondulări spaţiale prin zona în care ea se măsoară, fie ea în spaţiul liber sau ocupat de obiecte oarecare. Deci, modificarea distanţelor dintre doi-trei sateliţi spaţiali este la fel de valabilă pentru evidenţierea undelor gravitaţionale ca şi observarea modificărilor în structura cristalină a unui material. Totuşi, în realitate, lucrurile par a nu sta întocmai aşa. Nu s-a înregistrat până acum nici o ondulare spaţială, mecanică, în propagare prin spaţiul liber sau ocupat de obiecte oarecare. Singurele observaţii sunt modificările în frecvenţă ale radiaţiilor electromagnetice care se propagă printr-un spaţiu în care există unde gravitaţionale. Nu există aşadar

nici o ondulare mecanică a spaţiului şi timpului, deşi spaţiul pare când întins (caz în care undele electromagnetice se propagă având lungimi de undă mai mari), când comprimat (caz în care undele electromagnetice se propagă având frecvenţe mai mari). Dar aceste îndinderi-comprimări nu par a fi de natură spaţială, mecanică, ci mai degrabă de natură temporală. Această comportare s-a observat deja în cazul dinamicii unor sisteme stelare binare sau în cazul nucleogenezei în unele stele masive. Nu se ştie deci mare lucru despre aceste unde gravitaţionale. Ele pot fi ca atare sau radiaţie de cuadrupol, cum se demonstrează în teoria relativităţii generalizate, sau radiaţie dipolară, cum reiese din teoria Brans-Dicke, la fel de bine cum pot fi propagări mecanice, spaţiale indetectabile cu mijloacele tehnice de care dispune ştiinţa la ora actuală, sau doar nişte propagări temporale, pot avea o viteză de propagare finită sau nu, cert este însă faptul că realitatea observaţională este prea săracă în informaţii, deocamdată, în toate direcţiile teoretice amintite anterior, [6].

I.3.b Găurile negre

Unii partizani ai teoriei relativităţii generalizate încadrează observarea existenţei găurilor negre ca un alt succes al acestei teorii. Cu toate acestea suntem de părere că existenţa conceptului de gaură neagră este anterior teoriei relativităţii generalizate. Motiv pentru care considerăm că această teorie are un merit care nu poate avea întâietate în ceea ce priveşte predicţia existenţei acestor corpuri cereşti. Este adevărat că teoria relativităţii generalizate oferă un cadru matematic mai adecvat studiului acestor fascinante corpuri cereşti, însă de cele mai multe ori sunt necesare ipoteze suplimentare, care vin din sfera mecanicii cuantice sau sunt specifice altor teorii ale gravitaţiei sau gravitaţiei cuantice (chiar dacă aceste teorii n-au primit încă “botezul” realităţii), pentru o mai bună descriere a ceea ce s-ar putea întâmpla datorită unei găuri negre. Este evident că pentru descrierea fizicii găurilor negre teoria relativităţii generalizate nu este suficientă.

I.3.c Variaţia constantei atracţiei universale

Teoria relativităţii generalizate postulează o constantă a atracţiei universale fixă în raport cu timpul, în vreme ce alte teorii alternative ale gravitaţiei postulează o constantă a atracţiei universale variabilă cu timpul. Din acest motiv studiul experimental al variaţiei acestei constante fundamentale cu timpul ne poate face să decidem în favoarea uneia sau alteia dintre teoriile gravitaţiei. În plus, problema variaţiei constantei atracţiei universale nu poate fi decisă de concluziile de la finalul subcapitolului „ Invarianţa în timp fizic a constantelor fizice fundamentale”. De multe ori, pentru a îngloba acţiunea unor forţe necunoscute la nivel observaţional se recurge la un artificiu de calcul. Pentru că nu se cunoaşte expresia forţei şi modul ei de acţiune se consideră că forţa are expresia cunoscută, iar cantitatea necunoscută se înglobează într-o constantă a atracţiei universale variabilă. Acest fapt este posibil datorită ecuaţiei Poisson. Aşadar, deşi nu avem propriu-zis de-a face cu o constantă a atracţiei universale variabilă, din considerente practice este mai comod să se lucreze aşa. Apoi, mai există cazurile când această variabilitate este postulată de unele teorii multidimensionale. Acestea descriu un univers care nu există într-un timp fizic, deci din acest punct de vedere într-un timp fizic constanta atracţiei universale ar fi invariabilă. Dar există totuşi şi predicţii cu privire la această variaţie, la nivelul spaţiului fizic, cu patru dimensiuni, care ar putea fi testate experimental. În opinia noastră, de vreme ce au fost elaborate într-un spaţiu nefizic, în care nu sunt valabile etaloanele de spaţiu şi timp cunoscute, nu vedem de ce aceste predicţii ar fi valabile apoi în spaţiul şi timpul fizic. Cu toate acestea se pare că aceste predicţii se bucură de o inexplicabil de mare credibilitate la ora actuală. Şi oricum am lua-o trebuie să le testăm, altminteri ar fi mai greu de demonstrat multidimensionalitatea lumii în care trăim.

În cele ce urmează vom face o trecere în revistă a valorilor experimentale între care variază constanta atracţiei universale, nu neapărat pentru importanţa consecinţelor lor ci mai cu seamă pentru faptul că literatura

de specialitate este foarte bogată în acest sens, comparativ cu datele experimentale despre existenţa undelor gravitaţionale, de exemplu.
Din cauza volumului mare de informaţii privitoare la acest subiect, în cele ce urmează vom încerca o sistematizare a lor după ipotezele în care s-a dedus variaţia constantei atracţiei universale.

a) Temperatura suprafeţei Pământului

Din punct de vedere istoric actul de naştere al ideii de variaţie a unor constante fundamentale ale fizicii l-a reprezentat articolul publicat în 1937, în revista Nature, de către marele fizician englez P. Dirac. El sugera posibilitatea variaţiei câtorva constante fundamentale, printre care şi constanta de atracţie universală, datorită vârstei universului.Teller, [7], a combătut ipoteza lui Dirac argumentând că aceasta ar veni în contradicţie cu dovezile paleontologice.

Argumentul său se baza pe estimarea temperaturii centrului Soarelui folosind teorema virială. În condiţiile în care luminozitatea Soarelui este proporţională cu gradientul energiei, cu drumul liber mediu al fotonilor şi cu suprafaţa astrului, în condiţiile în care legea de conservare a momentului cinetic este respectată şi temperatura medie a Pământului este proporţională cu puterea a 4-a a energiei primite, el a concluzionat că ipoteza lui Dirac este greşită. Dacă masa Soarelui ar fi fost constantă şi constanta atracţiei gravitaţionale ar fi fost cu 10% mai mare în urmă cu 300 de milioane de ani, temperatura suprafeţei Pământului ar fi trebuit să fie cu 20% mai mare, aproape de temperatura de fierbere a apei. Aceasta contravine existenţei trilobiţilor în era Cambrian.

Chiar şi în cazul unor variaţii mai mici, $(\Delta G/G) < 0{,}1$, Gamow, [8], conchide că aceasta ar fi pus sub semnul întrebării existenţa bacteriilor şi algelor care au trăit acum 4 miliarde de ani. Eichendorf şi Reinhardt (citaţi de către [9]) pun argumentul lui Teller în lumina unei noi estimări a vârstei universului şi a unor noi descoperiri paleontologice. Ei obţin, pentru variaţia constantei atracţiei universale, valoarea $(dG/dt/G) < 2 \times 10^{-11} ani^{-1}$.

Totuşi problema rămâne deschisă deoarece temperatura suprafeţei Pământului poate fi influienţată la rându-i de mai mulţi factori: conţinutul de vapori de apă, de dioxid de carbon, curenţii de aer etc. Bilanţul termic al atmosferei se schimbă o dată cu încălzirea globală într-un timp scurt comparativ cu vârsta Pământului. De exemplu, o creştere a temperaturii conduce la o atmosferă mai bogată în vapori de apă, ce vor determina la rându-le o schimbare în mecanismul convectiv de transport al căldurii care va creşte albedo-ul planetei şi va determina în final, de fapt, o scădere a temperaturii. A extrapola acest bilanţ pentru o perioadă de câteva miliarde de ani pare a fi o idee greşită.

b) Pământul care se dilată

Egeyed,[10], a remarcat faptul că datele paleomagnetice pot fi folosite pentru a calcula raza Pământului la diferite epoci. În ipoteza că aria uscatului a rămas constantă în perioada dilatării Pământului şi expansiunea continentelor s-a făcut numai ca urmare a acestei dilatări, determinarea diferenţei de paleoaltitudine între două puncte de separare cunoscută, ne dă măsura paleorazei la o anumită epocă.

Creer [11] a arătat că din datele paleomagnetice mai vechi de 300 de milioane de ani rezultă o creştere coerentă a razei Pământului, fără salturi. Wesson [12] a concluzionat că dilatarea Pământului de la o rază de aproximativ 3700 km, cu o rată constantă de 0,66 mm/an, timp de 4,5 miliarde de ani ar da configuraţia de astăzi a continentelor. Dicke, [13,14], a pus în corespondenţă dilatarea Pământului cu variaţia constantei gravitaţionale. McElhinny s. a., [15], au reestimat valorile obţinute pentru paleorazele Pământului şi au extins aceeaşi analiză la Lună, Marte şi Mercur. Pornind de la ecuaţia echilibrului hidrostatic, ei au generalizat rezultatul lui Dicke. Ţinând cont de faptul că Pământul nu s-a dilatat cu mai mult de 0,8% în ultimii 400 milioane de ani, Luna cu 0,06% şi Marte cu 0,6% în ultimii 4 miliarde de ani ei au concluzionat că:

$$(-dG/dt/G) \leq 8 \times 10^{-12} ani^{-1}$$

Acest rezultat ar fi într-un bun acord cu teoria dacă s-ar fi ţinut seama de câteva obiecţii. În primul rând autorii au neglijat cu desăvârşire deriva continentelor ca fenomen

ce se poate petrece independent de dilatarea Pământului, aşa cum îl cunoaştem noi din şcoala primară, o simplă alunecare a plăcilor continentale ca rezultat al plutirii pe un strat de magmă şi al rotaţiei planetei. Apoi, în afara acestor date paleomagnetice care să susţină teoria dilatării în timp a Pământului, nu mai există alte date fizice care să susţină aceeaşi teorie. Deci teoria în sine e greu de verificat, însăşi veridicitatea ei e pusă sub semnul întrebării. Dacă ar fi totuşi valabilă am mai găsi încă o obiecţie: rata de dilatare a Pământului poate fi limitată şi de un alt aspect geofizic, încetinirea în timp a rotaţiei Pământului. Şi nu în ultimul rând, dacă am fi considerat Pământul ca o sferă elastică ce se extinde sub acţiunea forţelor hidrodinamice interne, apărute ca o consecinţă a rotaţiei sale, (şi a atracţiei Lunei), atunci probabil n-ar mai fi avut loc nici o variaţie a constantei atracţiei universale.

c) Sistemul Pământ-Lună

În studiul sistemului Pământ-Lună se pot pune în corespondenţă o variaţie în timp a constantei atracţiei universale cu frecvenţa rotaţiilor Lunei în jurul Pământului. Determinarea ratelor de rotaţie ale Lunei în jurul Pământului în trecut se poate face din date paleontologice, din menţionarea documentară a eclipselor sau declinaţiilor stelare.

Studiind eclipsele din perioada 1374 i. e. n. şi 1715 e. n. [16] concluzionează că:

$$(dG/dt/G) = (2{,}6 \pm 15) \times 10^{-11} \text{ani}^{-1},$$

Iar [17], folosind efemeride din 1663 până în 1972, incluzând 40.000 de ocultaţii lunare din 1943 până în 1972, deduce că:

$$|dG/dt/G| < 2 \times 10^{-11} \text{ani}^{-1}$$

Datele paleontologice, cum ar fi ritmul de creştere găsit în unele fosile de scoici sau corali, deasemenea pot oferi informaţii despre frecvenţa rotaţiilor Lunei în jurul Pământului. Folosind aceste date Blake, [18], trage concluzia că:

$$(dG/dt/G) = (-0{,}5 \pm 2) \times 10^{-11} \text{ani}^{-1}$$

Van Flandern, [19,20], a studiat mişcarea Lunei din perioada 1955 până în 1974, luând ca referinţă timpul atomic. El găseşte valorile:

$$(dG/dt/G) = (-8 \pm 5) \times 10^{-11} ani^{-1},$$

pentru ca şase ani mai târziu, [21], acelaşi autor să-şi revizuiască poziţia şi să propună, din aceleaşi ipoteze, valorile:

$$(dG/dt/G) = (3,2 \pm 1,1) \times 10^{-11} ani^{-1}$$

În încheierea acestor considerente despre sistemul Pământ-Lună să facem observaţiile critice de rigoare. Se cunoaşte încă din vremea lui Poincare că, în timp, într-un sistem de trei corpuri (Soare+Pământ+Luna) distanţele se măresc ca efect al mişcării, nicidecum al variaţiei constantei gravitaţionale.

d) Sistemul Solar

Urmărind distanţele dintre corpurile în rotaţie faţă de centrul rotaţiei, se pot, deasemenea, pune în corespondenţă variaţia distanţelor cu variaţia constantei gravitaţionale. Pentru o mai mare acurateţe a măsurătorilor se pot lua în comparaţie o scală gravitaţională de timp cu o scală atomică de timp, ce reprezintă referinţa.

Shapiro s. a., [22], au comparat semnalele radar întârziate dintre Pământ, Venus şi Mercur cu un ceas atomic din cesiu, între anii 1966 şi 1969. Datele experimentale au fost modelate într-un spaţiu-timp Schwarzschild, luându-se în consideraţie perturbaţiile datorate altor planete.. Ei au găsit valorile:

$$|dG/dt/G| < 4 \times 10^{-10} ani^{-1}$$

Datele privitoare la planeta Venus n-au putut fi utilizate datorită impreciziei în determinarea porţiunii planetei care reflecta semnalele radar. Valorile anterioare au fost îmbunătăţite luându-se în considerare datele culese de misiunile Mariner 9 şi Mars Orbiter, de către Reasenberg şi Shapiro, [23,24]:

$$|dG/dt/G| < 1,5 \times 10^{-10} ani^{-1},$$

urmând ca analiza să fie aprofundată de Shapiro, [25], pentru a rezulta:

$$(dG/dt/G) = (-2 \pm 10) \times 10^{-12} ani^{-1}$$

Datele culese de misiunile spaţiale Mariner 10, cât şi cele înregistrate în apropierea planetelor Venus şi Mercur, au fost valorificate de către Anderson s. a., [26]. Prelucrarea lor a condus la rezultatul:

$$(dG/dt/G) = (0,0 \pm 2,0) \times 10^{-12} ani^{-1}$$

Experimentul Lunar Laser Ranging (LLR) a măsurat poziţia Lunei cu o acurateţe de 1 cm timp de 30 de ani. Acest fapt a fost posibil datorită misiunilor spaţiale Apollo 11, 14, 15 şi Lunakhod 1 şi 4, care au montat pe suprafaţa Lunei oglinzi folosite pentru a reflecta razele laser trimise de pe Pământ.

Modelând datele din primii şase ani ai experimentului, într-o teorie Brans-Dicke pentru un univers plat, fără constantă cosmologică, Williams s. a., [27], au ajuns la concluzia că:

$$|dG/dt/G| \leq 3 \times 10^{-11} ani^{-1}$$

Muller s. a., [28], au folosit date dintr-o perioadă de 20 de ani ai experimentului LLR. Ei au reuşit să îmbunătăţească rezultatul anterior prin valorile:

$$|dG/dt/G| < 1,04 \times 10^{-11} ani^{-1}$$

Dickey s. a., [29], au îmbunătăţit acest rezultat prin:

$$|dG/dt/G| < 6 \times 10^{-12} ani^{-1},$$

iar Williams s. a., [30], prelucrând datele culese dintr-o perioadă de 24 de ani, au obţinut:

$$|dG/dt/G| < 8 \times 10^{-12} ani^{-1}$$

Reasenberg s. a., [31], au folosit datele culese în cele 14 luni ale misiunii Viking şi au găsit:

$$|dG/dt/G| < 10^{-12} ani^{-1}$$

Folosind toate datele astrometrice disponibile şi în particular cele obţinute de misiunile Viking care au amartizat, Hellings s. a.,[32], au dedus că:

$$|dG/dt/G| = (2 \pm 4) \times 10^{-12} ani^{-1},$$

interval valoric care a fost îmbunătăţit, printr-o altă modelare a dinamicii asteroizilor, de către Reasenberg, [33]:

$$|dG/dt/G| < 3 \times 10^{-11} ani^{-1}$$

şi de către Chandler s. a., [34]:

$$|dG/dt/G| < 10^{-11} ani^{-1}$$

Toate aceste măsurători par că testează nu numai variaţia constantei gravitaţionale dar şi dinamica sistemului solar în genere. Observaţiile critice de la finalul considerentelor privitoare la sistemul Pământ-Lună se potrivesc şi aici, de vreme ce problema celor n corpuri şi

problema celor 3 corpuri se rezolvă în principiu la fel. Revăzând problema din unghiul de vedere al teoremei lui Earnshow, lucrurile par a se clarifica definitiv. Teorema lui Earnshow afirmă pe scurt că potenţialele fizice ale unor configuraţii de sarcini (în cazul de faţă gravitaţionale) ce depind de inversul razei, verifică ecuaţia lui Laplace. Ceea ce înseamnă că aceste potenţiale nu au maxime sau minime locale. Sarcinile vor fi într-un echilibru instabil, ori depărtându-se ori apropiindu-se în timp unele de altele. Forma generală a potenţialului care descrie mişcarea a n corpuri este un potenţial care verifică ecuaţia lui Laplace. (Din această formă generală, printr-o dezvoltare de multipol, se poate particulariza mişcarea pentru două, patru etc. sarcini). Deci, cele n corpuri sunt într-un echilibru instabil. A pune acum această instabilitate pe seama variaţiei constantei atracţiei universale ar putea fi o chestie de speculare a faptului că instabilităţile nu se pot determina din teorema lui Earnshow (ea afirmă doar că există aceste instabilităţi). Cu toate acestea instabilităţile se pot datora mişcării într-un potenţial invers proporţional cu raza, şi nicidecum variaţiei constantei gravitaţionale. Prin această variaţie instabilităţile ar putea fi însă determinate, acesta fiind şi motivul pentru care ar fi de preferat ca ipoteză.

e) Pulsari

În cadrul acestei ipoteze se poate pune în corespondenţă variaţia perioadei de pulsaţie a unor sisteme binare de pulsari sau a unor pulsari solitari cu variaţia constantei atracţiei universale.

Darmour s. a., [35], folosind datele furnizate de pulsarul PSR 1913+16, au găsit:

$$(dG/dt/G) = (1,0 \pm 2,3) \times 10^{-11} ani^{-1},$$

pentru ca ulterior Darmour şi Taylor, [36], să reanalizeze datele furnizate de acelaşi pulsar şi să ajungă la concluzia că :

$$(dG/dt/G) < (1,10 \pm 1,07) \times 10^{-11} ani^{-1}$$

Kaspi s. a., [37], folosind date furnizate de doi pulsari diferiţi, PSR B1913+16 şi PSR B1855+09, au găsit două intervaluri valorice diferite, fiecare corespunzător unui set de date, respectiv:

$$(dG/dt/G) = (4 \pm 5) \times 10^{-12} ani^{-1}$$ şi

$$(dG/dt/G) = (-9 \pm 18) \times 10^{-12} ani^{-1}$$

Toate valorile precedente se referă la sistemele binare de pulsari. Totuşi, analiza perioadei de pulsaţie se poate extinde şi asupra pulsarilor singulari. Heintzmann şi Hillebrandt, [38], studiind pulsarul JP 1953, au dedus că:

$$|dG/dt/G| < 10^{-10} ani^{-1}$$

În aceeaşi ordine de idei, Mansfield, [39], a obţinut intervalul:

$$0 \leq -(dG/dt/G) < 6{,}8 \times 10^{-11} ani^{-1}$$

iar Goldman, [40], cu datele furnizate de pulsarul PSR 0655+64, a dedus că rata de descreştere a constantei gravitaţionale se încadrează în intervalul valoric:

$$0 \leq -(dG/dt/G) < 5{,}5 \times 10^{-11} ani^{-1}$$

Bineînţeles, variaţia perioadei de pulsaţie se poate datora şi altor cauze în afara variaţiei constantei gravitaţionale. Însă distanţele enorm de mari la care se petrece acest fenomen ne împiedecă pur şi simplu să găsim o altă explicaţie fizică, aflaţi fiind în imposibilitatea de a face investigaţii mai amănunţite. De aici se vede şi importanţa considerării variaţiei constantei atracţiei universale. În ea se înglobează toate incertitudinile datorate enormităţii spaţiului şi neputinţa noastră de a face măsurători mai detaliate pe baza cărora să găsim alte explicaţii. În opinia noastră, variaţia constantei gravitaţionale trebuie folosită în exclusivitate, numai când studiem fenomene ce se petrec la distanţe cosmice, tocmai din motivul enunţat puţin mai devreme. La distanţe comparabile cu distanţele existente în sistemul solar, variaţia constantei gravitaţionale nu are sens deoarece gradul de incertitudine al măsurătorilor este incomparabil mai mic şi putem găsi oricând explicaţii alternative satisfăcătoare.

f) Evoluţia stelelor

În cadrul acestei ipoteze se poate face o corelaţie între evoluţia stelelor şi variaţia constantei gravitaţionale. O creştere/descreştere a constantei gravitaţionale implică (din pricina ecuaţiei lui Poisson) o creştere/descreştere a densităţii stelei. Fapt ce ar atrage după sine o

accelerare/încetinire a evoluţiei stelei faţă de evoluţia ei normală şi ar putea fi observat printr-o modificare în luminozitatea stelei.

Un efect secundar al modificării evoluţiei stelei ar fi şi modificarea adâncimii zonei convective, fapt ce ar avea drept consecinţă o schimbare a modurilor de vibraţie, în special ale undelor acustice. Studiind acest fenomen Demarque s. a., [41], au conchis că:

$$|dG/dt/G| < 2\times10^{-11}ani^{-1}$$

În aceeaşi ordine de idei au mai întreprins studii Guenther s. a., [42,43], şi au obţinut:

$$|dG/dt/G| < 4{,}5\times10^{-12}ani^{-1} \text{ şi}$$
$$|dG/dt/G| < 1{,}6\times10^{-12}ani^{-1}$$

Accelerarea evoluţiei stelare a fost observată de Thorsett, [44], studiind sisteme binare de stele neutronice. Accentuarea vârstei stelelor a fost pusă în corelaţie cu creşterea perioadei binare a rotaţiilor în jurul centrului comun de masă. Deoarece variaţia perioadei de rotaţie poate fi pusă în corespondenţă cu variaţia constantei gravitaţionale, s-a ajuns la concluzia că:

$$(dG/dt/G) = (-0{,}6 \pm 4{,}2)\times10^{-12}ani^{-1}$$

Garcia-Berro s. a., [45], au pus în corespondenţă variaţia constantei gravitaţionale cu rata de răcire a piticelor albe (observată prin modificările funcţiei de luminozitate). Ei au tras concluzia că:

$$0 \le -(dG/dt/G) < 4\times10^{-11}ani^{-1}$$

Deasemenea, s-a mai corelat variaţia constantei gravitaţionale cu vârsta clusterilor stelari globulari. Aceştia trebuie să aibe o vârstă mai mică decât a universului, dar s-a observat o îmbătrânire a lor. Del'Innocenti s. a., [46], au stabilit că:

$$(dG/dt/G) = (-1{,}4 \pm 2{,}1)\times10^{-11}ani^{-1}$$

Acceaşi idee s-a aplicat la clusterii de galaxii de către Dearborn şi Schramm, [47]. Ei au observat o descreştere a constantei gravitaţionale, exprimată prin:

$$0 \le -(dG/dt/G) < 4\times10^{-11}ani^{-1}$$

Nu în ultimul rând acestor observaţii li s-ar mai putea adăuga încă una, foarte importantă: îmbătrânirea universului la graniţele sale observabile. Această observaţie

poate avea drept cauză o variaţie a constantei atracţiei universale.

g) Nucleosinteza

O variaţie a constantei gravitaţionale la momentul nucleosintezei ar atrage după sine o variaţie a densităţii materiei generate din energie şi implicit o variaţie a numărului de nuclee, la acel moment. Barrow, [48], presupunând că nucleosinteza a cunoscut o abundenţă de nuclee de heliu, a obţinut:

$$|dG/dt/G| < (2 \pm 9{,}3) \times 10^{-12} ani^{-1},$$

pentru un univers plat.

Incluzând, alături de He, D şi Li, Rothman şi Matzner, [49], au obţinut:

$$|dG/dt/G| < 1{,}7 \times 10^{-13} ani^{-1}$$

Accetta s. a., [50], studiind dependenţa abundenţei nucleelor de D, izotopilor de He şi Li de variaţia constantei gravitaţionale, au obţinut:

$$|dG/dt/G| < 9 \times 10^{-13} ani^{-1}$$

Referinţele capitolului I

[1] J. P. Uzan, Rev. Mod. Phys. **75**, 403-450, 2003.
[2] H. C. Ohanian, Found. Phys. **7**, 391, 1977.
[3] T. C. van Flandern, On the measurement of cosmological variations of the gravitational constant, L. Halpern, Univ. of Florida, 21, 1978.
[4] A. Einstein, Relativity: the special and general theory, Methuen & Co. Ltd, 1920.
[5] M. B. Răuţ-Time invariance of the fundamental physical constants-Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LVII (LXI)**, no. 2, 43-53, 2011;
[6] M. B. Răuţ, L. Chicoş, R. A. Stana, M. Agop, în Predictibilitate şi haoticitate în sisteme gravitaţionale, Ars Longa, Iaşi, 2011;
[7] E. Teller, Phys. Rev. **73**, 801, 1948;
[8] G. Gamow, Phys. Rev. Lett. **19**, 759, 1967;
[9] B. W. Petley, in The Fundamental Physical Comstants and The Frontier of Measurement (Hilger, Bristol), 1985;
[10] L. Egyed, Nature **190**, 1097, 1961;

[11] K. M. Creer, Nature **206**, 539, 1965;
[12] P. S. Wesson, Q. J. R. Astron. Soc. **14**, 9, 1973;
[13] R. H. Dicke, Science **138**, 653, 1962;
[14] R. H. Dicke, in Relativity, Groups and Topology, Lectures edited by C. and B. DeWitt, New York, 165, 1964;
[15] M. W. McElhinny, S. R. Taylor and D. J. Stevenson, Nature **271**, 316, 1978;
[16] P. M. Mueller, in On the Measurement of Cosmological Variations of the Gravitational Constant, edited by L. Halphern (University of Florida, Gainesville, FL), 93, 1978;
[17] L. V. Morrison, Nature **241**, 519, 1973;
[18] G. M. Blake, Mon. Not. R. Astron. Soc. **181**, 41, 1977;
[19] T. C. Van Flandern, Astron. J. **76**, 81, 1971;
[20] T. C. Van Flandern, Mon. Not. R. Astron. Soc. **170**, 333, 1975;
[21]T. C. Van Flandern, in Precision Measurements and Fundamental Constants II, NBS Circular No. 617 (U. S. GPO, Washington, D. C.), 625, 1981;
[22] I. I. Shapiro, W. B. Smith and M. B. Ash, Phys. Rev. Lett, **26**, 27, 1971;
[23] R. D. Reasenberg and I. I. Shapiro, in Atomic Massesand Fundamental Constants,Vol. 5 edited by J. H. Sanders and A. H. Wapstra (Plenum, New York), 643, 1976;
[24] R. D. Reasenberg and I. I. Shapiro, in On the Measurements of Cosmological Variations of the Gravitational Constant, edited by L. Halphern (University of Florida, Gainesville, FL), 71, 1978;
[25] I. I. Shapiro, in General Relativity and Gravitation, edited by N. Ashby, D.F. Bartlett and W. Wyss (Cambridge University Press, Cambridge, England), 1990;
[26] J. D. Anderson et al., in Proceedings of the 6th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Kyoto, June 1991, edited by H. Sato and T. Nakamura (World Scientific, Singapore), 353, 1992;
[27] P. J. Williams et al., Phys. Rev. Lett. **36**, 551, 1976;
[28] J. Mueller, M. Schneider, M. Soffel and H. Ruder, Astrophys. J. Lett. **382**, 101, 1991;
[29] J. O. Dickey et al., Science **265**, 482, 1994;
[30] P. J. Williams et al., Phys. Rev. D **53**, 6730, 1996;

[31] R. D. Reasenberg et al., Astrophys. J. Lett. **234**, 219, 1979;
[32] R. W. Hellings et al., Phys. Rev. Lett. **51**, 1609, 1983;
[33] R. D. Reasenberg, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **310**, 227, 1983;
[34] J. F. Chandler, R. D. Reasenberg and I. I. Shapiro, Bull. Am. Astron. Soc. **25**, 1233, 1993;
[35] T. Darmour, G. W. Gibbons and J. H. Taylor, Phys. Rev. Lett. **61**, 1151, 1988;
[36] T. Darmour and J. H. Taylor, Astrophys. J. **366**, 501, 1991;
[37] V. M. Kaspi et al., Astrophys. J. **428**, 713, 1994;
[38] H. Heintzmann and H. Hillebrandt, Phys. Lett. A **54**, 349, 1975;
[39] V. N. Mansfield, Nature **261**, 560, 1976;
[40] I. Goldman, Mon. Not. R. Astron. Soc. **244**, 184,1990;
[41] P. Demarque et al., Astrophys. J. **437**, 870, 1994;
[42] D. B. Guenther et al., Astrophys. J. **445**, 148, 1995;
[43] D. B. Guenther, D. B. et al., Astrophys. J. **498**, 871,1998;
[44] S. E. Thorsett, Phys. Rev. Lett. **77**, 1432, 1996;
[45] E. Garcia-Berro et al., Mon. Not. R. Astron. Soc. **277**, 801, 1995;
[46] S. Del'Innocenti et al., Astron. Astrophys. **312**, 345,1996;
[47] D. S. Dearborn and D. N. Schramm, Nature **247**, 441,1974;
[48]J. D. Barrow, Mon. Not. R. Astron. Soc. **184**, 677, 1978;
[49] T. Rothman and R. Matzner, Astrophys. J. **257**, 450,1982;
[50] F. S. Accetta et al., Phys. Lett. B **248**, 146, 1990.

Note

[1] Studiul efectului Allais poate sugera câteva concluzii tulburătoare. Dacă facem ipoteza că valorile măsurate, în diversele experimente efectuate pe parcursul eclipselor de Soare, s-ar datora variaţiei constantei atracţiei universale (sau, prin extensie, vitezei luminii), atunci această variaţie,

posibilă într-un interval de timp foarte scurt (câteva minute pe parcursul a 48 de ore), invalidează toate ecuaţiile implicate în măsurători. De aici şi discrepanţele mari dintre valorile măsurate la diferite scale. Dacă ceasurile atomice măsoară doar diferenţe de câteva nanosecunde, perturbaţiile pendulelor Foucault şi Allais indică valori inimaginabil de mari. În ce priveşte acceleraţiile, aceastea sunt cu cinci ordine de mărime mai mici dacă sunt măsurate cu gravitmetrul decât cele corespunzâtoare pendulelor Foulcault şi Allais. Deci legile fizicii nu mai sunt valabile în acest caz. Dacă, totuşi, există o variaţie a vitezei luminii (sau a constantei gravitaţiei) pe termen lung sau foarte lung, atunci ne putem gândi la valabilitatea legilor fizicii, cu condiţia ca această variaţie să se facă extrem de lent.

[2] Inclusiv constanta atracţiei universale, deoarece ea depinde de viteza luminii (în relativitatea generală), într-o relaţie de inversă proporţionalitate.

[3] Din impunerea condiţiei de măsurabilitate (I.8) decurge legea propagării luminii. Din moment ce din această lege decurg toate principiile relativităţii (fără principiul echivalenţei, desigur) rezultă o concluzie formidabilă: din condiţia de măsurabilitate rezultă majoritatea principiilor relativităţii. În această situaţie n-ar trebui să înlocuim formularea „condiţia de măsurabilitate” cu „principiul de măsurabilitate” ?

[4] Se poate demonstra că nici una dintre traiectoriile newtoniene sau relativist restrânse nu poate explica deplasarea gravitaţională spre roşu, deoarece liniile de univers în absenţa curbării spaţiului ar rămâne autoparalele deci, intervalul de timp la emisia unui foton, de exemplu, va fi egal cu intervalul la recepţie, în timp ce, dacă liniile se propagă diferit, din cauza curburii spaţio-temporale, intervalul temporal la recepţie este mai mare decât intervalul propriu, corespunzător emisiei.

Capitolul II
Mişcarea în sisteme de referinţă neinerţiale

II.1 Problema celor două corpuri în repere inerţiale

În cele ce urmează ne propunem să studiem mişcarea punctului material P (de masă m) în câmpul gravitaţional creat de corpul S (de masă M), corp ce are formă sferică şi distribuţie sferică a densităţii. Să considerăm aşadar două sisteme de coordonate, un sistem de coordonate absolut faţă de care se studiază mişcarea sistemului de coordonate relativ (v. fig.II.1):

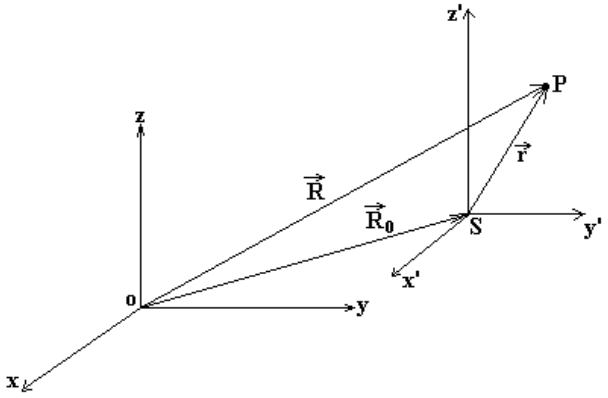


fig.II.1-cele două sisteme de coordonate, sistemul absolut OXYZ şi sistemul relativ SX'Y'Z'.

Asupra lui *P* acţionează:

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm\mathbf{r}}{r^2}\frac{}{r}.$$

Ecuaţia mişcării absolute (faţă de sistemul absolut de coordonate) a punctului *P* este:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r} \qquad \text{(II.1)}$$

Datorită faptului că punctele materiale P şi S se atrag reciproc, această atracţie se manifestă diferit faţă de sistemul de referinţă absolut; astfel un corp va părea a fi

accelerat într-un sens iar celălalt corp în sens contrar. În conformitate, dacă P este “atras” înspre sistemul absolut atunci ar trebui să considerăm că punctul S se deplasează faţă de sistemul absolut datorită forţei:

$$\mathbf{F_1} = G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r}.$$

(II.2)

iar ecuaţia mişcării absolute a acestui punct este:

$$M\ddot{\mathbf{R}}_\mathbf{0} = G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r}.$$

Ţinând cont de faptul că:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R_0} + \mathbf{r}.$$

vom avem:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}}_\mathbf{0}$$

iar din (II.1) şi (II.2) rezultă:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{M+m}{r^3}\mathbf{u}$$

(II.3)

care este ecuaţia ce descrie mişcarea relativă a punctului P faţă de S, iar $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Vom face notaţiile: $\mu = G(M+m)$ este parametrul gravitaţional al cuplului de puncte materiale (S,P) şi $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$ acceleraţia punctului material P faţă de S. Să evaluăm acum ecuaţia (II.3) în coordonate polare (ρ,η). Se ştie că pentru componentele acceleraţiei gravitaţionale în coordonate polare avem:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\boldsymbol{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\boldsymbol{\eta}.$$

Ţinând cont de faptul că $\mathbf{r} = r\boldsymbol{\rho}$, din identificarea termenilor corespunzători fiecărui versor rezultă două ecuaţii scalare:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{\rho^2} \qquad \text{(II.4a)}$$

$$2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0. \qquad \text{(II.4b)}$$

Să ne ocupăm întâi de ecuaţia (II.4b). Înmulţim ambii termeni ai ecuaţiei cu ρ. Se observă imediat că avem:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)=0.$$

De unde rezultă:

$$\rho^2\dot{\theta}=C$$

(II.5)

care este binecunoscuta lege a doua a lui Kepler.

Introducând rezultatul (II.5) în ecuaţia (II.4a) vom avea:

$$\rho^3\ddot{\rho}-C^2=-\mu\rho$$

prin urmare:

$$\ddot{\rho}-\frac{C^2}{\rho^3}+\frac{\mu}{\rho^2}=0.$$

Observăm că ultima relaţie se mai poate scrie (după ce-am înmulţit-o cu $\dot{\rho}$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^2}-\frac{\mu}{\rho}\right)=0$$

din care rezultă imediat a doua integrală primă, integrala energiilor:

$$\frac{1}{2}\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^2}-\frac{\mu}{\rho}=h \qquad \text{(II.6)}$$

În relaţiile (II.5) şi (II.6) constantele C şi h pot fi determinate din condiţiile iniţiale ale mişcării.

II.2 Calculul deviaţiei newtoniene a luminii în câmp gravitaţional

Ridicând ecuaţia (II.5) la pătrat şi împărţind-o la (II.6) se obţine:

$$\frac{d\theta}{d\rho}=\pm\frac{C}{\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2h+\frac{\mu}{\rho}-\frac{C^2}{\rho^2}}} \qquad \text{(II.7)}$$

formulă care ne ajută să calculăm deviaţia luminii în aproximaţia newtoniană.

Pentru aceasta considerăm că corpul ceresc unde se va măsura aceasta se află la mare distanţă faţă de sursă (o stea oarecare). Ca urmare Pământul se va mişca faţă de

emiţător nu pe o traiectorie eliptică ci pe una hiperbolică. Ca atare vom avea:

$$\rho = a(e\cosh u - 1) \qquad \text{(II.8)}$$

pentru traiectoriile eliptice, unde a – este semiaxa mare, u – anomalia adevărată, e – excentricitatea elipsei, iar ecuaţia s-a obţinut din ecuaţia elipsei înlocuind $\cos u$ cu $\cosh u$, în virtutea aproximaţiei făcute.

În continuare să ne întoarcem la ecuaţia (II.6) pentru a deduce câteva expresii de care vom avea nevoie în desfăşurarea raţionamentului.

Ecuaţia (II.6) se mai poate scrie, după aducerea la acelaşi numitor şi rearanjarea termenilor:

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm\sqrt{2h\rho^2 + 2\mu\rho - C^2}\,.$$

Prin anularea radicalului se obţin punctele în care Pământul are apropierea maximă şi minimă de centrul atractor, numite puncte absidale (periheliu şi afeliu). Prin urmare vom considera că ecuaţia:

$$2hr^2 + 2\mu r - C^2 = 0$$

are rădăcinile:

$$r_{1,2} = \pm a(e \mp 1)\,,\ e > 1,\ a > 0.$$

Din:

$$r_1 + r_2 = \frac{\mu}{h} = 2a \Rightarrow h = \frac{\mu}{2a}$$

şi

$$r_1 - r_2 = -\frac{C^2}{2h} = -a^2(e^2 - 1) \Rightarrow C^2 = \mu a(e^2 - 1).$$

Introducând aceste rezultate în (II.7) vom avea:

$$d\theta = \frac{ae\sinh u\, C}{\sqrt{\frac{\mu}{a}a^2(e\cosh u - 1)^2 + 2\mu a(e\cosh u - 1) - \mu a(e^2 - 1)\left[a(e\cosh u - 1)\right]}}\,du$$

.

După efectuarea unor calcule elementare vom avea:

$$d\theta = \frac{C}{\sqrt{\mu a}(e\cosh u - 1)}\,du \qquad .$$

Înlocuind şi pe C din formulele obţinute mai sus vom avea:

$$d\theta = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e\cosh u - 1}\, du. \qquad \text{(II.9)}$$

Formula (II.9) ne permite să calculăm deviaţia luminii. Considerând că lumina venită de la o sursă îndepărtată şi trecând prin apropierea Soarelui este deviată de acesta pe o traiectorie hiperbolică şi ajunge la receptor (Pământ) (de aici şi aproximaţia $\rho = a(e\cosh u - 1)$, ca şi când Pământul s-ar mişca în jurul sursei de lumină pe această traiectorie), obţinem:

$$\delta\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e\cosh u - 1} + \alpha - \pi = \alpha = \frac{\Delta}{2}$$

care este deviaţia newtoniană (Δ fiind deviaţia razei de lumină calculată în relativitatea generală iar deviaţia luminii în mecanica newtoniană are exact jumătate din valoarea calculată în mecanica einsteiniană).

Să ilustrăm acum acest rezultat. Pentru aceasta să calculăm întâi integrala:

$$\int_0^{2\pi} \frac{C}{\sqrt{\mu a(e\cosh u - 1)}}\, du = 2\sqrt{e^2 - 1} \int_0^{\infty} \frac{du}{e\cosh u - 1}$$

Ideea cea mai simplă prin care se poate rezolva această integrală este de a face schimbarea de variabilă:

$$\tanh\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tanh\frac{\varphi}{2}$$

Cu aceasta vom înlocui cantităţile de sub integrală funcţie de noua variabilă după cum urmează:

$$\cosh u = \frac{1 + \tanh^2 u/2}{1 - \tanh^2 u/2} = \frac{1 + \frac{e-1}{e+1}\tanh^2\varphi/2}{1 - \frac{e-1}{e+1}\tanh^2\varphi/2} =$$

$$= \frac{e+1+(e-1)\tanh^2\varphi/2}{e+1-(e-1)\tanh^2\varphi/2} = \frac{e(\cosh^2\varphi/2 + \sinh^2\varphi/2) + \cosh^2\varphi/2 - \sinh^2\varphi/2}{e(\cosh^2\varphi/2 - \sinh^2\varphi/2) + \cosh^2\varphi/2 + \sinh^2\varphi/2} =$$

$$= \frac{e\cosh\varphi + 1}{e + \cosh\varphi}$$

Diferenţiala du se calculează efectuând întâi derivata logaritmică a expresiei:

$$\tanh\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tanh\frac{\varphi}{2}$$

Vom avea aşadar:

$$\ln\tanh\frac{u}{2} = \ln\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} + \ln\tanh\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{d\left(\tanh\frac{u}{2}\right)}{\tanh\frac{u}{2}} = \frac{d\left(\tanh\frac{\varphi}{2}\right)}{\tanh\frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{\left(\tanh\frac{u}{2}\right)_u^1 du}{\tanh\frac{u}{2}} = \frac{\left(\tanh\frac{\varphi}{2}\right)_e^1 d\varphi}{\tanh\frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{\left(\tanh\frac{u}{2}\right)_u^1 du}{\tanh\frac{u}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{e^{1/2} + e^{-1/2}}\right)^1}{\tanh\frac{u}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{du}{\tanh\frac{u}{2}\cdot\cosh^2\frac{u}{2}} = \frac{du}{\sin u} \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

Se face următorul raţionament:

$$\frac{r}{a} \cong 1 - e\cosh u \cong \frac{e^2 - 1}{1 + e\cosh\varphi} \cong \frac{e^2 - 1}{e + \cosh\varphi}$$

în care primii doi termeni din dreapta s-au obţinut din ecuaţia parametrică a unei conice în care s-a făcut transformarea cos~cosh, pentru că mişcarea se face după o hiperbolă, iar ultimul termen este aproximaţia penultimului atunci când unghiul φ tinde la infinit. Ţinând cont de aceste aproximaţii proiecţia mişcării pe axa *y* va fi:

$$\frac{y}{a} = \sqrt{e^2 - 1}\sinh u = \frac{e^2 - 1}{e + \cosh\varphi}\sinh\varphi$$

Reţinând ultimii doi termeni din dreapta şi utilizând relaţia dintre cele două diferenţiale obţinută puţin mai sus va rezulta imediat:

$$\sqrt{e^2-1}\,du=\frac{e^2-1}{e+\cosh\varphi}\,d\varphi$$

$$du=\frac{\sqrt{e^2-1}}{e+\cosh\varphi}\,d\varphi$$

Integrala în noua variabilă va fi deci:

$$\int_0^{\infty}\frac{du}{e\cosh u-1}=\int_0^{\infty}\frac{\frac{\sqrt{1-e^2}}{(e+\cosh\varphi)}}{\frac{e\cosh\varphi+e}{e+\cosh\varphi}-1}\,d\varphi=\sqrt{e^2-1}\int_0^{\infty}\frac{(e\cosh\varphi+e)/(e+\cosh\varphi)}{e^2\cosh u+e-e-\cosh\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\int_0^{\infty}\frac{e+\cosh\varphi}{\cosh\varphi[e+\cosh\varphi]}\,d\varphi$$

Expresia de mai sus se rezolvă foarte simplu, după cum urmează:

$$\frac{1}{\cosh\varphi}=\frac{\cosh\varphi}{\cosh^2\varphi}=\frac{\cosh\varphi}{1+\sinh\varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\int_0^{\infty}\frac{\cosh\varphi}{1+\sinh^2\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\int_0^{\infty}\frac{d(\sinh\varphi)}{1+\sinh^2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\arctan(\sinh\varphi)\Big|_0^{\infty}=$$

Iar valoarea finală căutată va fi:

$$\int_0^{\infty}\frac{C}{\sqrt{\mu a(e\cosh u-1)}}du=2\sqrt{e^2-1}\int_0^{\infty}\frac{du}{e\cosh u-1}=2\sqrt{e^2-1}\,\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\,\frac{\pi}{2}=\pi$$

Să vedem în continuare, pentru clarificarea acestei probleme, un raţionament simplu în urma căruia se calculează Δ', deviaţia in mecanica newtoniană, rezultat conform cu [1].

Presupunem că dispunem de o rază de lumină care se propagă în vecinătatea Soarelui. Conform cu ipoteza lui Newton, corpusculii luminoşi având masă pot fi atraşi de către Soare după o lege invers proporţională cu pătratul distanţei. Datorită vitezei lor mari de propagare nu se vor mai mişca după o traiectorie eliptică ci după o traiectorie hiperbolică. Să presupunem că această traiectorie este situată pe tangenta la suprafaţa de contact cu Soarele. Ramurile hiperbolei vor tinde asimptotic la infinit.

Raportate la cele două axe de simetrie ale hiperbolei, între asimptote există relaţia:

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a} = \pm\sqrt{e^2 - 1}$$

unde a şi b sunt semiaxele elipsei din care, prin extensie la infinit, s-a obţinut hiperbola. Ca urmare excentricitatea e este foarte mare. În aceste condiţii unghiul de deviaţie va fi Δ', de două ori unghiul dintre asimptote:

$$\Delta' = 2\arctan\frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

(II.10)

Deoarece e este mare, traiectoria fiind hiperbolă $(e > 1)$ putem aproxima $\sqrt{e^2 - 1} \cong e$ şi $\Delta' = 2/e$ (arcul al cărui tangentă este mic poate fi aproximat cu unghiul).

Distanţa c-a (unde c este distanţa dintre focarul elipsei şi capătul opus al semiaxei mari) reprezintă de fapt chiar raza R a Soarelui. Deci:

$$R = c - a = a(e - 1).$$

De unde aproximând ca şi mai înainte $e - 1 \cong \epsilon$, vom avea:

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{e}.$$

Ţinând seama de această expresie, deviaţia va deveni:

$$\Delta' = \frac{2a}{R}.$$

Integrala energiilor este în acest caz (în ipoteza că la mare distanţă de Soare, corpusculii luminoşi se comportă ca nişte particule clasice):

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = R = \frac{\mu}{2a}$$

Dar, în cazul nostru, trebuie să lucrăm din perspectiva relativistă .

Notăm $V^2 = \mu/a$, înţelegând prin V viteza în sens relativist, unde $V^2 - v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ reprezintă o expresie generalizată a vitezei, v – viteza în sens clasic.

Avem aşadar:

$$\Delta' = \frac{2a}{R}\frac{\mu}{\mu} = \frac{2\mu}{V^2 R} = \frac{\Delta}{2}$$

(II.11)

unde $\Delta = \frac{4\mu}{V^2 R}$ reprezintă deviaţia razei de lumină calculată în relativitatea generală. Numeric, deviaţia în sens newtonian are valoarea de $0'',87$, adică exact ½ din cea einsteiniană şi rezultatul este ireconciliabil. Experimental, s-a verificat exact ecuaţia (II.11), deci perspectiva relativist-generală este cea adevărată.

II.3 Calculul avansului de periheliu în sisteme inerţiale

Conform teoriei lui Newton, un corp ceresc trece prin periheliu şi prin afeliu la momente diferite (după un număr oarecare de perioade *T*), astfel încât aceste puncte absidale sunt fixe. Prin urmare avansul de periheliu, pus în evidenţă de măsurătorile experimentale, nu este explicat.

Să arătăm, în cele ce urmează, acest rezultat. Pentru aceasta să considerăm ecuaţia (II.7), în care facem schimbarea de variabilă:

$$\rho = a(1 - e\cos u),$$

unde $u \in [0, 2\pi]$.

Ecuaţia care dă punctele absidale este, cu $h < 0$:

$$2h\rho^2 + 2\mu\rho - C^2 = 0.$$

cu rădăcinile de forma:

$$r_{1,2} = a(1 \mp e)$$

vom avea:

$$C^2 = \mu a(1 - e^2) \qquad \text{şi} \qquad -2h = \frac{\mu}{a}$$

Introducând aceste valori în (II.7) găsim:

$$d\theta = \pm \frac{Ca e \sin u}{a(1 - e\cos u)\sqrt{-\frac{\mu}{a}a^2(1 - e\cos u)^2 + 2\mu a(1 - e\cos u) - \mu a(1 - e^2)}}\, du =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - e^2}\sqrt{\mu a}\, a e \sin u}{\sqrt{\mu a}\, a(1 - e\cos u)\sqrt{(1 - e\cos u)(2 - 1 + e\cos u) - 1 + e^2}}\, du =$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}\, e \sin u}{(1-e\cos u)\sqrt{1-e^2\cos^2 u - 1 + e^2}}\, du = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\, du$$

Avansul de periheliu va fi dat de $\delta\omega = \theta - 2\pi$:

$$\delta\omega = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\, du - 2\pi \qquad \text{(II.12)}$$

În conformitate cu ce trebuie să obţinem avem:

$$\int_0^{2\pi} \frac{du}{1-e\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$$

(II.12a)

În aceste condiţii $\delta\overline{\omega} = 0$.

Să demonstrăm acum acest rezultat. Trebuie deci să calculăm expresia:

$$\int_0^{2\pi} \frac{C}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)}\, du = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)}\, du$$

care de fapt se reduce la calculul integralei:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos u)}\, du;$$

Se procedează asemănător ca la calculul deviaţiei, ţinându-se seama de faptul că mişcarea in acest caz nu mai este una hiperbolică. Vom folosi prin urmare substituţia:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

cu care se înlocuiesc similar funcţiile de sub integrală în noua variabilă.

$$\cos u = \frac{1-\tan^2 u/2}{1+\tan^2 u/2} = \frac{1-\dfrac{1-e}{1+e}\tan^2\varphi/2}{1+\dfrac{1-e}{1+e}\tan^2\varphi/2} =$$

$$= \frac{1+e-(1-e)\tan^2\varphi/2}{1+e+(1-e)\tan^2\varphi/2} = \frac{e(\tan^2\varphi/2+1)+1-\tan^2\varphi/2}{e(1-\tan^2\varphi/2)+1+\tan^2\varphi/2} =$$

$$=\frac{e+\cos^2\varphi/2-\sin^2\varphi/2}{e\left(\cos^2\varphi/2-\sin^2\varphi/2\right)+\cos^2\varphi/2+\sin^2\varphi/2}=\frac{e+\cos\varphi}{e\cos\varphi+1}$$

Analog se diferenţiază logaritmic expresia:

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

adică:

$$\frac{\sin\varphi/2}{\cos\varphi/2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\sin u/2}{\cos u/2}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\ln\sin\varphi/2-\ln\cos\varphi/2=\ln\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}+\ln\sin u/2-\ln\cos u/2$$

Rezultatul anterior se mai poate scrie:

$$\ln\tan\varphi/2=\ln\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}+\ln\tan u/2$$

dar:

$$\frac{\frac{1}{2}\cos^2\varphi/2+\frac{1}{2}\sin^2\varphi/2}{\sin\cos\varphi/2\cos\varphi/2}d\varphi=\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\frac{du}{\sin u}$$

Deci:

$$\frac{du}{\sin u}=\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

Apoi se scriu relaţiile parametrice proiectate pe axa *y* a mişcării:

$$\frac{r}{a}=1-e\cos u=\frac{1-e^2}{1+e\cos\varphi}$$

$$\frac{y}{a}=\sqrt{1-e^2}\sin u=\frac{1-e^2}{1+e\cos\varphi}\sin\varphi$$

Raţionând identic se găseşte expresia *du*:

$$\sqrt{1-e^2}\sin u=\frac{1-e^2}{1+e\cos\varphi}\sin\varphi$$

de unde:

$$\sqrt{1-e^2}\,du=\frac{1-e^2}{1+e\cos\varphi}\,d\varphi$$

prin urmare:

$$du=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\varphi}\,d\varphi$$

În noua variabilă integrala se calculează simplu, după cum urmează:

$$\int_0^{2\pi}\frac{du}{1-e\cos u}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+e\cos\varphi)}}{1-e\frac{e+\cos\varphi}{e\cos\varphi+1}}\,d\varphi=\sqrt{1-e^2}\int_0^{2\pi}\frac{1/(1+e\cos\varphi)}{e\cos u+1-e^2-e\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$\sqrt{1-e^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-e^2}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}2\pi=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}\,du}{1-e\cos u}=2\pi$$

Deoarece acesta este rezultatul teoriei clasice s-au căutat alte teorii care să explice fenomenul avansului de periheliu. Aceste teorii au fost elaborate după două principii diferite: 1) un prim principiu a fost abordarea problemei dintr-o perspectivă clasică modificând forţa de interacţiune gravifică prin diverşi termeni corectivi; 2) prin modificarea de esenţă a teoriei gravitaţiei, care s-a făcut prin elaborarea relativităţii generale.

De subliniat că, în acest ultim caz, s-a obţinut pentru avansul periheliului formula generală:

$$\delta\omega=\frac{6\pi\mu}{V^2a(1-e^2)}$$

(II.13)

unde $V=c$ (viteza în sens relativist) iar $\mu=GM$, M – masa Soarelui

Dăm în continuare câteva valori ale acestui avans, din Anuarul Observatorului Astronomic din Bucureşti şi conform cu teoria relativităţii:

	Mercur	Venus	Pământ
Teorie	43″	8″,6	3″,8
Observaţie	43″,11	8″,4	5″,9

Tab. II.1

În privinţa direcţiei 1) problema a fost abordată în nenumărate modalităţi. O primă abordare a fost concepută

de către Clairault, care a adoptat o formă corectată a legii de atracţie universală. Mergând pe aceeaşi idee A. Hall a dat formula empirică:

$$F(\rho) = -\frac{G}{\rho N} \quad \text{cu} \quad N = 1 + 1574 \cdot 10^{-10}$$

Newcomb a luat $N = 2 + 1612 \cdot 10^{-10}$ şi găseşte pentru avansurile de periheliu ale planetelor telurice:

Mercur	Venus	Terra	Marte
43″,37	16″,28	10″,45	5″,55

Tab. I.2

Avansul de periheliu se calculează cu formula:

$$\delta\omega = \pi(N - 2)$$

unde: $N = -\frac{aF'(a)}{F(a)}$, a este semiaxa mare, $F' = \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho}$

Alţi cercetători au modificat legea atracţiei universale adăugând şi termeni corectivi:

a) $F(\rho) = -\frac{\mu}{\rho^2} - \frac{\alpha\mu}{\rho^3}$, (Clairaut), cu $\alpha > 0$, foarte mic,

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} = \frac{2}{\rho} - \frac{\alpha/\rho^2}{1 + \alpha/\rho}$$

$$\delta\omega = \pi \frac{\alpha/a}{1 + \alpha/a}$$

sau în cazul $\alpha << a$, (J. Chazy):

$$\delta\omega = \pi \frac{\alpha}{a}$$

b) $F(\rho) = -\frac{\mu}{\rho^2} + \frac{\alpha\mu}{\rho^4}$, (Maillord), cu:

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} = -\frac{2}{\rho} - \frac{2\alpha/\rho^3}{1 + \alpha/\rho^2}$$

şi:

$$\delta\omega = 2\pi\alpha/a^3$$

c) $F(\rho) = -\frac{\mu}{\rho^2} - \frac{\alpha\mu}{\rho^5}$, (Décombe), cu:

$$\delta\omega = 3\alpha\pi/a^3$$

d) $F(\rho) = -\frac{\mu e^{-\alpha\rho}}{\rho^2}$, (Laplace), caz în care avem:

$$\frac{F(\rho)}{F(\rho)} = -\frac{2}{\rho} - \alpha$$

şi:

$$\delta\omega = \pi\alpha a$$

Cu această din urmă formulă de calcul rezultă un avans secular de $40''$ pentru Mercur, $25''$ pentru Venus, $20''$ pentru Terra, la fel pentru Marte.

Mai există şi alte ipoteze de corectare a forţei gravitaţionale. Oricum, corectitudinea lor este îndoielnică, mai ales dacă limităm cadrul discuţiei la domeniul strict al mecanicii newtoniene în repere inerţiale (aşa cum au fost propuse la vremea lor).

Din acest motiv, credem că este evidentă necesitatea, cel puţin la nivel intuitiv, a introducerii unor concepte noi în mecanica newtoniană, pentru a putea fi extinsă la sisteme de referinţă neinerţiale şi pentru a justifica, într-o bună măsură, rezultatele avansului de periheliu. Pe de altă parte, o asemenea mecanică a sistemelor neinerţiale ar reprezenta o bună bază de comparaţie cu mecanica relativistă. Şi nu în ultimul rând, ea ar aduce completări pentru posibilele descrieri ale unor fenomene ce nu se pot explica prin nici una din mecanicile „tradiţionale”.

II.4 Problema celor două corpuri în repere neinerţiale

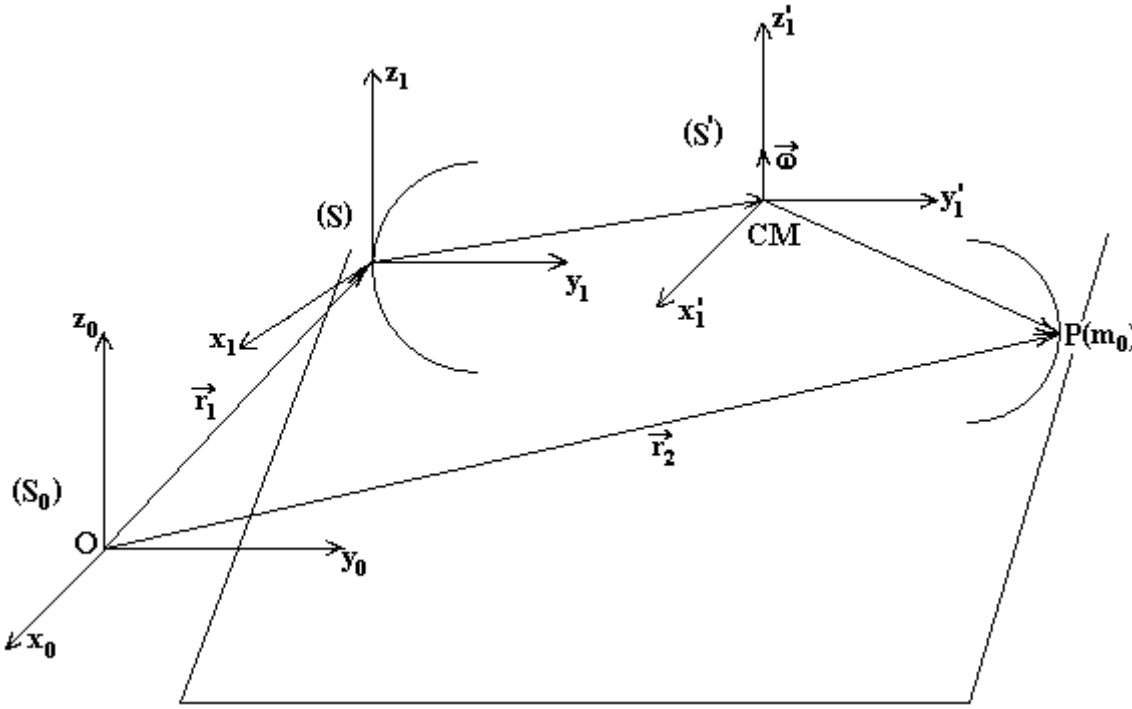


fig. II.2: reperul fix S_0 , reperul neinerţial S şi reperul centrului de masă CM.

Să considerăm un reper (S), planul x_1y_1 coincizând cu planul $x_1'y_1'$ al reperului (S') al centrului de masă CM pentru perechea de puncte materiale S – P.

Reperul (S) nu este inerţial deoarece, faţă de (S_0) (reperul fix), acesta se mişcă pe o traiectorie curbilinie.

Presupunem, în continuare, că mişcarea lui (S) raportată la CM este o mişcare de rotaţie, de ecuaţie:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\mathbf{z}_1$$

$\mathbf{z^1}$ fiind versorul vertical în (S).

În cazul de faţă, asupra punctului P acţionează efectul cumulativ al forţelor:

$$m_2\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{SI} + \mathbf{F}_{rot}$$

Termenul $\mathbf{F}_{SI}$ se datorează atracţiei date de S şi este conform cu mişcarea studiată anterior, pentru sisteme de referinţă inerţiale (II.3):

$$\mathbf{F}_{SI} = -\,m_2\frac{\mu}{r^3}\mathbf{u}$$

unde $\mu = G(m_1 + m_2)$ şi $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

Termenul $\mathbf{F}_{rot}$ se datorează rotaţiei sistemului (S) faţă de (S_0):

$$\mathbf{F}_{rot} = -\,m_2\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}\right]$$

(II.14)

termen ce cuprinde forţele caracteristice: centrifuge şi Coriolis. Prin urmare mişcarea punctului P va fi descrisă de ecuaţia:

$$m_2\ddot{\mathbf{r}} = -\,m_2\frac{\mu}{r^3}\mathbf{u} - m_2\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}\right]$$

(II.15)

În mod analog cu studiul mişcării inerţiale, vom evalua ecuaţia (II.15) în coordonatele cilindrice (ρ, η, z_1), $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r}$

Asfel, avem:

$\mathbf{r} = r\boldsymbol{\rho}$, $\quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\boldsymbol{\rho} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\eta}$, $\quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{\rho} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{\eta}$

, $\quad \boldsymbol{\omega} = \omega\cdot\mathbf{z}_1$

Prin urmare:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho} & \boldsymbol{\eta} & \mathbf{z}_1 \\ 0 & 0 & \dot{\omega} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\dot{\omega}\boldsymbol{\eta}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \omega\mathbf{z}_1\times(r\omega\boldsymbol{\eta}) = -\,r\omega^2\boldsymbol{\rho}$$

$$2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} = 2\omega\mathbf{z}_1\times(\dot{r}\boldsymbol{\rho} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\eta}) = +2\dot{r}\omega\boldsymbol{\eta} + 2r\omega\dot{\theta}\boldsymbol{\rho}$$

Înlocuind aceste rezultate în ecuaţia (II.15) şi proiectând pe axele polare vom avea:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} + r\omega^2 + 2r\omega\dot{\theta} \qquad \text{(II.16)}$$

şi, respectiv:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -r\dot{\omega} - 2\dot{r}\omega \qquad \text{(II.17)}$$

Se observă că, pentru $\omega = 0$, se obţin ecuaţiile care descriu mişcarea în sistemele inerţiale.

Pentru obţinerea integralelor prime se procedează similar cu cazul sistemelor inerţiale, se înmulţeşte ecuaţia (II.17) cu r şi se observă că avem:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[r^2(\dot{\theta} + \omega)\right] = 0$$

de unde se obţine legea a II-a a lui Kepler pentru sisteme neinerţiale:

$$r^2(\dot{\theta} + \omega) = C \qquad \text{(II.18)}$$

Constanta C se determină din condiţiile iniţiale, dar nu mai are aceeaşi semnificaţie ca în cazul sistemelor inerţiale întrucât se poate scrie:

$$r^2\dot{\theta} = C_0 \qquad \text{şi} \qquad r^2\omega = C_1$$

unde C_0 are această semnificaţie, iar C_1 se datorează rotaţiei.

Introducând aceste ecuaţii în termenul drept al ecuaţiei (II.16) vom obţine:

$$-\frac{\mu}{r^2} + 2r\frac{C_0}{r^2}\cdot\frac{C_1}{r^2} + r\frac{C_1^2}{r^4} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{C_1}{r^3}(C_1 + 2C_0)$$

Se observă o dependenţă a forţei $\sim r^{-3}$ asemănătoare ca formă cu cea introdusă de Clairaut. Termenul în r^{-3} nu apare ca o corecţie adusă forţei gravitaţionale, introdusă empiric, ci în mod natural, ca o consecinţă a rotaţiei sistemului (S).

Ecuaţia (II.16) se mai poate scrie:

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta} + \omega)^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

adică:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0$$

similar cu rezultatele obţinute pentru sistemele de referinţă inerţiale.

Înmulţind această ecuaţie cu $\dot{r}$ rezultă imediat:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2}-\frac{\mu}{r}\right)=0$$

din care se obţine aceeaşi formă a integralei prime a energiilor:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2}-\frac{\mu}{r}=h \qquad \text{(II.19)}$$

unde h se determină din condiţiile iniţiale ale mişcării.

II.5 Calculul deviaţiei luminii în câmp gravitaţional

În acest caz se procedează asemănător, urmând acelaşi raţionament ca la sistemele inerţiale. Diferenţele apar din cauza termenului suplimentar datorat rotaţiei.

Se pleacă de la integralele prime (II.18) şi (II.19). Ecuaţia (II.18) scrisă sub forma:

$$\dot{\theta}=\frac{C}{r^2}-\omega$$

se ridică la pătrat şi se împarte termen cu termen la (II.19). Va rezulta ecuaţia:

$$\frac{d\theta}{dr}=\pm\left(\frac{C}{r^2}-\omega\right)\frac{1}{\sqrt{2h+2\frac{\mu}{r}-C^2}}$$

$$h>0$$

$$2h=\mu/a,\quad C^2=\mu a(e^2-1)$$

Din ecuaţia anterioară rezultă:

$$\theta-\theta_0=\sqrt{e^2-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{e\cosh u-1}-\omega\Delta t$$

Ţinând cont de rezultatele precedente şi de faptul ca valoarea integralei este π, vom avea:

$$\delta\theta=-\omega\Delta t+\frac{\Delta}{2}$$

rezultat în conformitate cu [2].

La un posibil alt rezultat se ajunge însă calculând deviaţia în acord cu referinţa [1]:

$$\delta\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(C - \omega r^2)}{\sqrt{\mu a}(e\cosh u - 1)} du - \alpha - \pi$$

Aici, între constante, avem relaţia:

$$C = C_0 + C_1 = r^2\dot{\theta} + r^2\omega$$

adică:

$$C - \omega r^2 = C_0$$

Vom acea deci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_0}{\sqrt{\mu a}(e\cosh u - 1)} du = \frac{C_0\pi}{C}$$

de unde rezultă o expresie mai generală pentru deviaţie:

$$\delta\theta = \pi\left(\frac{C_0}{C} - 1\right) + \frac{\Delta}{2} = \pi\left(\frac{C_0 - C_0 - C_1}{C_0 + C_1}\right) + \frac{\Delta}{2} = -\pi\frac{\omega}{\omega + \dot{\theta}} + \frac{\Delta}{2}$$

Acum putem aplica această formulă pentru a afla care ar fi deviaţia unei raze de lumină, măsurată pe Terra, in câmpul gravitaţional al Soarelui, (raza trece în vecinătatea astrului), în condiţiile în care Soarele nu este fix, ci se mişcă lent in jurul centrului galaxiei. Dacă pentru această rotaţie lentă, ω, vom lua valoarea -0”, 0068/an (mişcarea este retrogradă) şi pentru o rotaţie completă a Pământului în jurul Soarelui avem, dθ/dt, de 360 grade/an, găsim că mişcarea neinerţială are o contribuţie infimă la rezultatul final, trebuind deci să o neglijăm. Prin urmare, deviaţia finală va fi cunoscutul rezultat din cazul newtonian - 0”, 87, de două ori mai mică decât deviaţia calculată în teoria relativităţii (Δ).

II.6 Calculul avansului de periheliu

Se pleacă de la cele două integrale prime de bază, scrise sub forma:

$$r\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - C}$$

şi

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm\frac{C - \omega r^2}{r\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - C}}$$

$$h<0,\ r=a(1-e\cos u),\ C^2=\mu a(1-e^2),\ -2h=\frac{\mu}{a}$$

Din prima parte se obţine similar cu calculele de la sisteme inerţiale, iar în continuare după cum urmează:

$$d\theta=\frac{C}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)}du-\frac{\omega a^2(1-e\cos u)^2 ae\sin u}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)ae\sin u}=\ldots$$

$$=\ldots-\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega(1-e\cos u)du=\omega dt$$

Din ecuaţia Kepler:

$$(1-e\cosh u)du=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}dt$$

avansul va fi:

$$\delta\omega=\int_0^{2\pi}\frac{C}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)}du-\omega T-2\pi=-\omega T,$$

unde T este perioada, iar:

$$\int_0^{2\pi}\frac{C}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)}du=\sqrt{1-e^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{1-e\cos u}=2\pi$$

rezultat în conformitate cu [3].

Se poate ajunge la alt rezultat, [4], dacă se observă că:

$$C-\omega r^2=C_0$$

Vom avea, după schimbarea de variabilă şi calcule similare cu cele de la sisteme inerţiale:

$$d\theta=\frac{C_0}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)}du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\delta\omega=\int_0^{2\pi}\frac{C_0}{\sqrt{\mu a}(1-e\cos u)}du-2\pi=\sqrt{1-e_0^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{1-e\cos u}-2\pi=\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{\sqrt{1-e^2}}2\pi-2\pi$$

$$=\left(\frac{C_0}{C}-1\right)2\pi=-\frac{C_1}{C_0+C_1}2\pi=-2\pi\frac{\omega}{\dot\theta+\omega}$$

Similar calculului deviaţiei razelor de lumină în câmp gravitaţional şi în acest caz se poate calcula influienţa mişcării neinerţiale, care este de fapt generatoarea avansului de periheliu. În privinţa Pământului în rotaţie cu dθ/dt de 360 grade/an în jurul Soarelui, aflat la rândul său

în rotaţie în jurul centrului galactic cu ω de -0”, 0068/an, găsim că avansul de periheliu tinde la zero, ca în cazul mişcării inerţale (faţă de 5”, 9 din datele observaţionale). Din nefericire avem aceeaşi situaţie şi în cazul altor planete (Mercur 43”,11; Venus 8”, 4), deoarece avansul de periheliu calculat cu formula de mai sus este foarte mic, neglijabil, în fiecare caz în parte. Valorile teoretice ale avansului de periheliu, calculate în relativitatea generală sunt: pentru Mercur 43”, pentru Venus 8”, 6 iar pentru Terra 3”, 8.

II.7 Efectul Eötvös

Pe lângă calculele legate de stabilirea deviaţiei razelor de lumină în câmpuri gravitaţionale şi cele legate de avansul de periheliu, în cadrul studiului mişcării în sisteme de referinţă neinerţiale se mai poate descrie şi efectul Eötvös. În cele ce urmează vom face acest lucru. Însă mai întâi este necesară o mică introducere.

O serie de măsurători gravimetrice făcute în timpul unei expediţii, în anul 1900, pe un vas maritim aflat în mişcare, de o echipă germană de la Institutul de Geodezie din Posdam, a relevat rezultate surprinzătoare. Valorile măsurate ale greutăţii proprii a gravimetrului erau mai mici dacă vasul se deplasa către est şi mai mari dacă vasul se deplasa către vest. După un alt set de măsurători efectuate în anul 1908, rezultatele echipei germane s-au regăsit în explicarea fenomenului de către fizicianul maghiar Lorand Eötvös. Toate rezultatele experimentale sunt într-un bun acord cu cele calculate cu formula:

$$a_r = 2\Omega u \cos\Phi + \frac{u^2 + v^2}{R} \qquad \text{(II.20)}$$

unde a_r este acceleraţia relativă, Ω viteza unghiulară a Pământului, u viteza relativă faţă de Pământ în direcţie latitudinală (V-E), v viteza în direcţie longitudinală (N-S), Φ latitudinea unde se fac măsurătorile, R fiind raza Terrei.

Primul termen aflat în partea dreaptă a ecuaţiei (I.20) descrie efectul Eötvös. Al doilea termen aflat în partea dreaptă a ecuaţiei (I.20) reprezintă acceleraţia centrifugă

pentru care vasul urmează curbura Pământului. Aceasta este independentă de rotaţia Pământului şi de direcţia de mişcare a vasului; în condiţii normale, acest termen este neglijabil.

Ecuaţia (II.20) este rezultatul unui raţionament simplu. Forţa de atracţie efectivă a Pământului este rezultanta a două forţe: forţa de atracţie gravitaţională, care se stabileşte conform arhicunoscutei legi a lui Newton şi forţa centrifugă, produsă de rotaţia Pământului. Deoarece masele, la suprafaţa Terrei, sunt uniform distribuite şi viteza unghiulară cu care acesta se roteşte este constantă, greutatea obiectelor aflate în repaus la suprafaţa Pământului este constantă.

În cazul obiectelor aflate în mişcare la suprafaţa Pământului situaţia se schimbă. Din moment ce rotaţia Pământului este de la vest către est forţa centrifugă ce acţionează asupra unui corp aflat în mişcare la suprafaţa Pământului este mai mare dacă mişcarea este de la vest la est decât invers. Din acest motiv greutatea specifică a unui obiect care se mişcă spre est scade, în vreme ce greutatea specifică a unui obiect ce se mişcă spre vest creşte. Acesta este efectul Eötvös.

Totuşi, această teorie simplă şi intuitivă, nu este singura care explică acest efect. Formulele (II.16) şi (II.17) sunt ilustrative în acest sens, în cazul în care mişcarea s-ar face pe o traiectorie simplă, circulară. Mai exact, formula (II.16) descrie efectul Eötvös în acest caz. Se observă că am obţinut această descriere în cadrul unor ipoteze diferite, mai precis în cadrul descrierii mişcării în sisteme de referinţă neinerţiale.

Aşa-zisele forţe Coriolis şi Eötvös sunt proiecţiile unghiulare şi radiale ale forţei generate de mişcarea circulară. În acest caz efectul Eötvös nu mai este rezultatul variaţiei forţei centrifuge ci este rezultatul mişcării. Totuşi formulele (II.16) şi (II.17) nu descriu mişcarea pe suprafeţe sferice. Din acest motiv credem că ar fi mai potrivite să descrie mişcarea unor corpuri cosmice îndepărtate.

Înainte de toate, să observăm că dacă $\omega=0$ ecuaţiile (II.16) şi (II.17) descriu o mişcare formal inerţială. Componenta unghiulară, ecuaţia (II.17), conţine termenul

corespunzător forţei Coriolis. Proiecţia radială, ecuaţia (II.16), conţine termenii corespunzători forţelor centrifuge. Este remarcabil faptul că ultimul termen din dreapta al ecuaţiei (II.16) seamănă cu termenul Eötvös (v. ecuaţia (II.20)). Dacă notăm ω=Ω (viteza unghiulară a Pământului) şi (dθ/dt)r=u (viteza relativă faţă de pământ, în direcţia vest-est) şi dacă se neglijează contribuţiile forţelor centrifuge atunci acest termen va fi termenul Eötvös. Singura problemă cu termenul obţinut astfel de noi ar fi faptul că acesta nu descrie o mişcare pe o suprafaţă sferică. Ecuaţiile (II.16) şi (II.17) sunt corecte doar pe traiectorii circulare de rază fixă, obţinute din proiecţiile unor coordonate cilindrice. Rotaţia cu o rază fixă generează ambele efecte Eötvös şi Coriolis, dar numai pentru traiectorii circulare fixe. Componenta z a mişcării practic necontând, aceste efecte sunt practic la fel în oricare plan orizontal paralel cu cel iniţial. Aceasta este o consecinţă a faptului că mişcarea în plan vertical este nulă.

În cazul mişcării Pământului în jurul Soarelui, în contextul rotaţiei galaxiei, această descriere pare adevărată. Probabil şi secţiunea transversală a galaxiei noastre, care este apropiată ca formă de un cilindru, se datorează tot efectului Eötvös. Dar în cazul mişcării pe o suprafaţă sferică, ecuaţiile (II.16) şi (II.17) nu mai sunt valabile. Nu obţinem aceleaşi ecuaţii ca atunci când descriem mişcarea în coordonatele sferice şi acest fapt este conceptual eronat.

Să privim acum ecuaţiile (II.16) şi (II.17) dintr-o altă perspectivă. Ele descriu o mişcare circulară. Este mai simplu, prin urmare, să scriem acceleraţia în coordonate polare şi să urmăm paşii logici pentru a găsi ecuaţiile aceleiaşi mişcări circulare. Vom avea:

$$a_\rho = \ddot{r} - r(\dot{\theta}+\omega)^2 \quad \text{şi} \quad a_\eta = 2\dot{r}(\dot{\theta}+\omega) + r(\ddot{\theta}+\dot{\omega}).$$

Proiecţiile forţelor ce acţionează asupra unui punct material P vor arăta, după simplificări şi calcule simple:

$$a_\rho = -\frac{\mu}{r^2} - \ddot{r} + r\omega^2 + 2r\omega\dot{\theta} + r\dot{\theta}^2$$

$$a_\eta = -r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\omega} - 2\dot{r}\omega$$

care sunt, fără îndoială, aceleaşi ecuaţii (II.16) şi (II.17). Această observaţie este foarte importantă deoarece ne ajută să ne imaginăm o cale simplă pentru a găsi o formă corectă pentru ecuaţiile de mişcare în coordonate sferice. Maniera în care ω a fost inclusă în ecuaţiile de mai sus poate fi extrapolată pentru ecuaţiile corespunzătoare în coordonate sferice. Ca atare vom avea pentru componenta radială a acceleraţiei:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\dot{\phi} + \omega)^2 \sin^2\theta$$

Forţa elementară ce acţionează asupra unui punct material P, va fi:

$$a_r = -\frac{\mu}{r^2} - \ddot{r} + r\dot{\theta}^2 + r\omega^2 \sin^2\theta + r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + 2r\omega\dot{\phi}\sin^2\theta$$

(II.21)

Dacă vom considera doar termenii care prezintă interes atunci vom putea scrie:

$$a_E = r\dot{\theta}^2 + r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + 2r\omega\dot{\phi}\sin^2\theta$$

Dacă ţinem cont de faptul că vom avea pentru mişcarea orizontală a unui corp pe suprafaţa Pământului, pentru viteza sa verticală şi relaţia dintre altitudine şi elevaţie:

$$u = r\dot{\phi}\sin\theta, \quad v = r\dot{\theta}, \quad \Phi = 90 - \theta$$

atunci vom găsi o expresie similară expresiei (II.20), în care simbolurile au acceaşi semnificaţie fizică:

$$a_E = 2\omega u \cos\Phi + \frac{u^2 + v^2}{r}$$

(II.22)

Efectele centrifugale sunt de cele mai multe ori neglijabile, astfel încât acestea nu pun probleme serioase evaluării finale. Potrivit ecuaţiilor (II.21) şi (II.22) forţa rezultantă care acţionează asupra unui obiect în mişcare pe suprafaţa sferică a Pământului este mai mică dacă obiectul se mişcă spre est decât dacă se mişcă spre vest, [5]. De aceea greutatea specifică a unui obiect care se mişcă spre est scade, în vreme ce greutatea specifică a unui obiect ce

se mişcă spre vest creşte cu aceleaşi valori ca acelea calculate cu formula (II.20).

Referinţele capitolului II

[1] M. B. Răuţ- „Two body problem in a non-inertial frame of reference and the deflection of light rays by gravitational field”, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LI(LV)**, no.3-4, 63-68, 2005;
[2] C. I. Borş – „Devierea razei de lumină în mecanica newtoniană” – An. şt. Univ. „Al. I. Cuza”;
[3] C. I. Borş – „Two – body problem in a non-inertial frame of reference and the advance of perihelion” – Tensor, **53**, 1993;
[4] M. B. Răuţ- „On advance of perihelion in a non-inertial frame of reference two body problem”, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LI(LV)**, no. 1-2, 57-62, 2005;
[5] M. B. Răuţ-„On the Eotvos effect”, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LVI (LX)**, no. 1, 101-107, 2010.

Capitolul III
Studiul mişcării eliptice în diferite formalisme

III.1 Formalismul lagrangean

Să considerăm acum cazul unei mişcări simplificate în care centrul de masă al sistemului Soare-Pământ este fix. În aceste condiţii, problema celor două corpuri poate fi abordată în formalism lagrangean. Această abordare are menirea principală de a introduce o corecţie energiei cinetice cu care se pot deduce toate rezultatele obţinute anterior, corecţie care descrie într-o manieră mai simplă mişcarea în sisteme neinerţiale. În plus această corecţie se va folosi şi la studiul mişcării eliptice spaţiale la finalul căruia se va calcula avansul de periheliu în cel mai general caz.
Se pleacă de la ecuaţiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

în care expresia funcţiei lui Lagrange este:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} + \omega)^2\right] + \frac{GMm}{r}$$

cu $GM = \mu$, $q_k = \theta' = \theta + \omega t$ şi r, şi în care m este masa Pământului, M masa Soarelui, G constanta atracţiei universale, iar ω descrie rotaţia sistemului legat de Soare.

Ecuaţia Lagrange funcţie de prima coordonată generalizată va da prima integrală primă a mişcării:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}'} - \frac{\partial L}{\partial \theta'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}') = 0 \Rightarrow r^2(\dot{\theta} + \omega) = C$$

rezultat identic cu cel obţinut pentru cazul când centrul de masă nu era fix. A doua ecuaţie Lagrange scrisă pentru a doua coordonată generalizată va conduce, după aceleaşi prelucrări, la integrala energiei:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) + \frac{\mu m}{r^2} + mr\dot{\theta}'^2 = 0 \quad / \dot{r}$$

$$\ddot{r}\dot{r} + \frac{\mu\dot{r}}{r^2} + \dot{r}\frac{C^2}{r^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r} + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} = h$$

Să încercăm acum să obţinem ecuaţia parametrică a mişcării. În acest scop efectuăm schimbarea de variabilă:

$$\nu = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{dv}{d\theta'} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta'} = -\frac{r'}{r^2}$$

Ţinând cont că:

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \theta'}\frac{\partial \theta'}{\partial t} = r'\dot{\theta}' = \frac{r'C}{r^2}; \dot{\theta}' = \frac{C}{r^2}$$

integrala primă a energiei va deveni:

$$\dot{r}=\frac{r'C}{r^2}=-\frac{dV}{d\theta'}C\Rightarrow\frac{1}{2}C^2\left(\frac{dV}{d\theta'}\right)^2=h+\mu V-\frac{1}{2}C^2V^2$$

$$\left(\frac{dV}{d\theta'}\right)^2=-V^2+2\frac{\mu V}{C^2}+\frac{2h}{C^2}$$

de unde:

$$d\theta'=\frac{dV}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{2\mu V}{C^2}-V^2}}=\frac{dV}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}-\left(V-\frac{\mu}{C^2}\right)^2}}=\frac{dV}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}\sqrt{1-\frac{\left(V-\mu/C^2\right)^2}{2h/C^2+\mu^2/C^4}}}$$

Efectuând acum a doua schimbare de variabilă:

$$\omega=\frac{V-\mu/C^2}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}}\Rightarrow d\omega=\frac{dV}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}}\Rightarrow$$

va rezulta:

$$d\theta'=\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}\Rightarrow d(\theta+\omega t)=\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$$

Integrând expresia de mai sus vom avea:

$$d\theta=\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}-\omega dt\Rightarrow\theta-\theta_0=\arccos\omega-\omega\Delta t$$

$$\cos(\theta-\theta_0+\omega\Delta t)=\omega=\frac{V-\mu/C^2}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}}=\frac{1/r-\mu/C^2}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}}$$

unde: θ este anomalia unghiulară, $\theta-\theta_0$ este anomalia adevărată (φ), $\omega\Delta t$ este anomalia de periheliu.

Mergând in continuare pe firul calculului găsim rezultatul căutat, ecuaţia parametrică a mişcării:

$$r=\frac{1}{\frac{\mu}{C^2}+\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}\cos(\varphi+\omega\Delta t)}=\frac{\frac{C^2}{\mu}}{1+\sqrt{1+\frac{2hC^2}{\mu^2}}\cos(\varphi+\omega\Delta t)}=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\omega\Delta t)}$$

cu:

$$p=\frac{C^2}{GM},\qquad\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2hC^2}{\mu^2}}$$

parametrul şi excentricitatea figurii geometrice obţinute. Am folosit termenul general de figură geometrică deoarece,

deşi ecuaţia parametrică obţinută seamănă cu cea a unei conice, în momentul de faţă nu putem afirma cu certitudine asta. Intuitiv, putem presupune că ecuaţia obţinută descrie o conică ale cărei axe execută o rotaţie cu unghiul $\omega\Delta t$, cu:

$$\varepsilon=\frac{c}{a},\qquad p=a(1-\varepsilon^2),\qquad h<0,\ h>0,\ h=0$$

$$\varepsilon<1\ ,\ \varepsilon>1,\ \varepsilon=1$$

Dacă $c<a,\ \varepsilon<1\Rightarrow\sqrt{\frac{2hC^2}{\mu^2}+1}=\varepsilon=\frac{c}{a}$

vom avea:

$$\frac{2ph}{\mu}+1=\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow\frac{2ha(1-\varepsilon^2)}{\mu}+1=\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)\frac{\mu}{2a}\frac{1}{1-\varepsilon^2}<0$$

Efectuăm schimbarea de variabilă:

$$r=a(1-e\cos u);\qquad v=\frac{1}{a(1-e\cos u)}$$

Cu aceasta efectuăm următoarele calcule:

$$\omega=\frac{v-\mu/C^2}{\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}}=\frac{1-\mu/C^2a(1-e\cos u)}{a(1-e\cos u)\sqrt{\frac{2h}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}}};\qquad C^2=\mu a(1-e^2),$$

$$-2h=\frac{\mu}{a}$$

$$\sqrt{\frac{2h}{C^2}-\frac{\mu^2}{C^4}}=\sqrt{\frac{-\mu/a}{\mu a(1-e^2)}+\frac{-\mu^2}{\mu^2a^2(1-e^2)}}=\sqrt{\frac{1}{a^2(1-e^2)}+\frac{1}{a^2(1-e^2)}}=$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{1-e^2}}\sqrt{-1+\frac{1}{1-e^2}}=\frac{1}{a\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}}=\frac{e}{a(1-e^2)}$$

$$\omega=\frac{1-\frac{a(1-e\cos u)}{a(1-e^2)}}{a(1-e\cos u)\frac{e}{a(1-e^2)}}=\frac{1-e^2-(1-e\cos u)}{(1-e\cos u)e}=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}$$

$$\sqrt{1-w^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}\right)^2}=\frac{1}{1-e\cos u}\sqrt{(1-e\cos u)^2-(\cos u-e)^2}=$$

$$= \frac{1}{1 - e\cos u}\sqrt{1 - e^2\cos^2 u - \cos^2 u - e^2} = \frac{\sin u\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos u}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} = \frac{1 - e\cos u}{\sin u\sqrt{1 - e^2}}, \quad \omega = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$$

$$d\omega = \frac{-\sin u(1 - e\cos u) - (\cos u - e)e\sin u}{(1 - e\cos u)^2}du = \frac{\sin u(1 - e^2)}{(1 - e\cos u)^2}du$$

$$\frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \frac{\sin u(1 - e^2)}{(1 - e\cos u)^2}\frac{(1 - e\cos u)}{\sin u\sqrt{1 - e^2}}du = \sqrt{1 - e^2}\frac{du}{1 - e\cos u}$$

Integrarea ultimei expresii ne dă formula unghiului cu care se rotesc axele elipsei:

$$\delta\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos u}du - \omega\Delta t - 2\pi = -\omega\Delta t$$

sau:

$$\Delta t = T \Rightarrow \delta\theta = -\omega T = -2\pi\frac{\omega}{\dot{\theta}}$$

Se observă asemănarea cu formula avansului de periheliu. Va rezulta în final:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\theta + \omega\Delta t)}$$

care este ecuaţia unei rozete (unei elipse care se roteşte cu $\omega\Delta t$) când $\varepsilon < 1$, [1].

III.2 Formalismul hamiltonian

În cele ce urmează vom analiza mişcarea eliptică din perspectiva formalismului hamiltonian. Acest demers are drept scop obţinerea unor rezultate similare celor obţinute prin formalismul clasic, pentru a arăta astfel generalitatea rezultatelor.

Ecuaţiile lui Hamilton, împreună cu mărimile implicate, sunt cunoscute:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \qquad H = T + V$$

$$\begin{cases} T = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} + \omega)^2\right) \\ V = -\dfrac{m\mu}{r} \end{cases}$$

cu $\mu = GM$, $q_k = (r; \theta' = \theta + \omega t)$.

Făcând substituţiile de variabile generalizate:

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \rightarrow \dot{r} = \dfrac{p_r}{m} \\ p_\theta = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'} = mr^2\dot{\theta}' \Rightarrow \dot{\theta}' = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \end{cases}$$

obţinem funcţia lui Hamilton:

$$H = \sum_k p_k\dot{q}_k - L = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{m\mu}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{m\mu}{r}$$

care introdusă în sistemul de ecuaţii sus-amintit ne va conduce la următoarele rezultate:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\dfrac{\mu m}{r^2} - \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} \dot{\theta}' = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta = 0 \Rightarrow p_\theta = C \Rightarrow mr^2\dot{\theta}' = C \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta}' = C \Leftrightarrow r^2(\dot{\theta} + \omega) = C$$

şi:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m} \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\mu m}{r^2} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} = -\frac{\mu m}{r^2} - \frac{C^2}{mr^3};\ C^2 = m^2e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} = h$$

care reprezintă cele două integrale prime ale mişcării. Integrala energiei dă imediat:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - C^2}, \qquad dt = \pm\frac{rdr}{\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - C^2}}$$

Deosebim aceleaşi două cazuri:

a) $h < 0$, $2hr^2 - 2\mu r - C^2 = 0$, $r_1 = a(1 - e)$, $r_2 = a(1 + e)$, $a > 0$

$$\Rightarrow C^2 = \mu a(1 - e^2),\ -2h = \mu/a,\ r = a(1 - e\cos u)$$

în care rezultatele şi aproximaţiile valabile la mişcarea în sistemele inerţiale sunt aceleaşi. Cu acestea integrala primă a energiei va deveni:

$$dt=\frac{rdr}{\sqrt{2hr^2+2\mu r-C^2}}=\frac{a(1-e\cos u)ae\sin u}{\sqrt{-\frac{\mu}{a}a^2(1-e\cos u)^2+2\mu a(1-e\cos u)-\mu a(1-e^2)}}du=$$

$$=\frac{a^2e\sin u(1-e\cos u)}{\sqrt{\mu a}\sqrt{-1-e^2\cos^2 u+2e\cos u+2-2e\cos u-1+e^2}}du=\frac{a^2e\sin u(1-e\cos u}{\sqrt{\mu a}e\sin u}$$

Prin integrare se obţine:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}dt=(1-e\cos u)du\Rightarrow u-e\sin u=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-\tau)$$-ecuaţia lui Kepler

Sau, integrând pe o singură perioadă, vom avea:

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\int_0^{2\pi}(1-e\cos u)du=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}-e\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\int_0^{2\pi}\cos u du=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos u du=\sin u\Big|_0^{2\pi}=0$$

$$\frac{T}{2\pi}=\sqrt{\frac{a^3}{\mu}},\quad \mu=GM\Rightarrow \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}=cons.$$

Rezultat care generalizat arată astfel:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{T_2^2}{a_2^3}=\ldots=\frac{4\pi^2}{GM}=cons.$$

şi care este legea a II-a a lui Kepler.

Analog:

b) $h>0,\ 2hr^2+2\mu r-C^2=0,\ r_1=a(1-e),\ r_2=-a(e+1)$, $e>1,\ a>0.$

$$2h=\frac{\mu}{a},\qquad C^2=\mu a(e^2-1),\qquad r=a(e\cosh u-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt=\frac{rdr}{\sqrt{2hr^2+2\mu r-C^2}}=\frac{a(e\cosh u-1)ae\sinh u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}a^2(e\cosh u-1)^2+2\mu a(e\cosh u-1)-\mu a(e^2-1)}}$$

$$=$$

$$=\frac{a^2e\sinh u(e\cosh u-1)}{\sqrt{\mu a}\sqrt{e^2\cosh^2 u-1-2e\cosh u+2e\cosh u-2+1-e^2}}du=\frac{a^2e\sinh u(e\cos}{\sqrt{\mu a}e\sinh}$$

.

Din care prin integrare se obţine:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}dt=(e\cosh u-1)du \Rightarrow e\sinh u-u=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-\tau)$$

ecuaţia Kepler valabilă pentru mişcarea hiperbolică.

III.3 Mişcarea eliptică spaţială

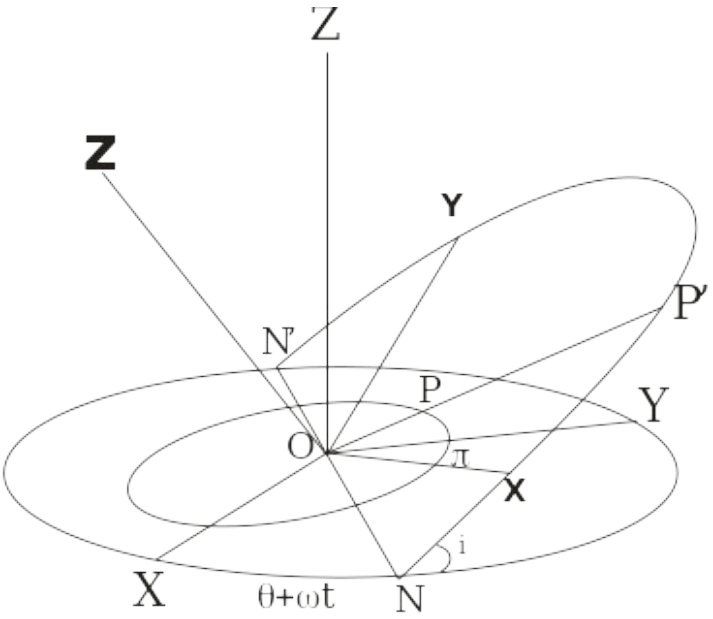


fig.III.1-reprezentarea schematică a parametrilor mişcării spaţiale: $XN+NX=\varpi$ este longitudinea de periheliu, $NX=\varpi-\theta'$, $\theta'=\theta+\omega t=XN$ este longitudinea nodului, i înclinarea, τ timpul trecerii prin periheliu.

Să analizăm acum cazul mişcării eliptice spaţiale. Energia cinetică raportată la masă este binecunoscuta expresie în coordonate polare, [2]:

$$2T=r'^2+r^2\omega'^2+r^2\cos^2\omega\psi'^2$$

unde ω cuprinde şi influenţa rotaţiei sistemului neinerţial. Este de fapt aceeaşi expresie utilizată anterior la

formalismul lagrangean. Efectuând schimbarea în noile variabile canonice conjugate vom avea:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r} = R, \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} = r^2\dot{\omega} = \Omega, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = r^2 \cos^2\omega\dot{\psi} = \Psi$$

Prin urmare, funcţia lui Hamilton va fi:

$$T + U = \frac{R^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2r^2} + \frac{\Psi^2}{2r^2\cos^2\omega} - \frac{\mu}{r}$$

Cu această funcţie se construieşte ecuaţia Hamilton – Jacobi:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{1}{2r^2\cos^2\omega}\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2 - \frac{\mu}{r} = h$$

unde S reprezintă soluţia căutată. Observăm că termenul $\frac{1}{2r^2\cos^2\omega}\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2$ depinde de două variabile, fapt ce îngreunează alegerea unei soluţii în conformitate. De aceea vom face abstracţie de el şi vom căuta o soluţie de forma unei sume între un termen dependent de ω şi unul dependent de funcţia:

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = -\frac{G^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + 2h$$

Soluţia căutată va fi de forma:

$$S = G\omega + \int \pm\sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + 2h}dr$$

unde G este o constantă.

Funcţia căutată, S, trebuie să satisfacă relaţiile:

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t - \tau, \quad \frac{\partial S}{\partial G} = g, \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta} = -\Theta \qquad (*)$$

ne ocupăm întâi de ultima relaţie de mai sus. După cum se observă, aceasta se mai poate scrie:

$$G\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -\Theta$$

unde $\partial\omega/\partial\theta$, se determină din dependenţa de înclinarea, i:

$$d\omega = -d\theta\cos i$$

vom avea deci:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -\cos i \qquad \text{şi} \qquad G\cos i = \Theta$$

Ne ocupăm acum de ecuaţia $\frac{\partial S}{\partial G}=g$. Prin integrare vom obţine:

$$\omega - g = \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\pm\sqrt{-\frac{1}{r^2}+\frac{2\mu}{G^2 r}+\frac{2h}{G^2}}} \qquad (**)$$

dacă derivăm expresia de mai sus, vom avea:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2 = -\frac{1}{r^2}+\frac{2\mu}{G^2 r}+\frac{2h}{G^2}$$

care reprezintă ecuaţia clasică a mişcării în plan.

Studiul polinomului de gradul II din membrul drept al ecuaţiei anterioare, ne conduce la următoarele relaţii între coeficienţi şi rădăcini:

$$\frac{\mu}{-h}=2a, \quad h=-\frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{G^2}{-2h}=a^2(1-e^2), \quad G=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

pentru a calcula integrala (**), se face schimbarea de variabilă:

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\varphi}{a(1-e^2)}$$

iar integrala are drept rezultat:

$$\omega - g = \varphi$$

Prin urmare vom obţine imediat ecuaţia parametrică a elipsei:

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(\omega - g)}{a(1-e^2)}$$

ţinând cont că:

$$g=\varpi - \theta$$

Să luăm acum în discuţie prima ecuaţie din (*):

$$\int_{a(1-e)}^{r} \frac{r\,dr}{\pm\sqrt{-G^2+2\mu r+2hr^2}} = t-\tau$$

pentru a rezolva integrala se face schimbarea de variabilă:

$$r=a(1-e\cos u)$$

care ne conduce după integrarea expresiei:

$$\int_0^u \pm\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1-e\cos u)\,du = t-\tau$$

la ecuaţia lui Kepler:

$$u - e\sin u = n(t-\tau)$$

În cursul analizei au fost identificate următoarele constante:

$$\begin{cases} h = -\frac{\mu}{2a} & G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} & \Theta = G\cos i \\ t-\tau & g = \varpi - \theta & \theta \end{cases}$$

care de fapt pot constitui un set complet de elemente canonice:

$$\alpha_1 = -h = \frac{\mu}{2a} \qquad \alpha_2 = G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

$$\alpha_3 = \Theta = G\cos i$$

$$\beta_1 = \tau \qquad \beta_2 = g = \varpi - \theta, \qquad \beta_3 = \theta$$

Considerentele anterioare au drept scop stabilirea expresiilor celor şase ecuaţii ale teoriei perturbaţiilor pentru mişcarea eliptică spaţială. Nu putem atinge acest deziderat fără a face câteva consideraţii despre metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

Fie ecuaţia generală:

$$y'' + py' + qy = r$$

cu *p, q, r* funcţii de variabile independente *x*. Presupunem că avem ecuaţia omogenă:

$$y'' + py' + qy = 0$$

adică dispunem de soluţiile y_1 şi y_2 care satisfac determinantul lui Wronski:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \delta$$

soluţia generală a ecuaţiei neomogene căutate se poate scrie:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

unde C_1 şi C_2 sunt două constante arbitrare. Metoda variaţiei constantelor constă de fapt în a considera constantele variabile. Derivata lui *y* va conduce la expresia:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2'$$

Impunem condiţia:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$$

de unde rezultă:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

Calculând derivata a doua vom a avea:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2) = r$$

ecuaţie care se simplifică din pricina faptului că termenul:

$$y_1'' + py' + qy_1$$

se anulează rezultând:

$$C_1'y_2' + C_2'y_2' = r$$

Ecuaţia de mai sus, împreună cu relaţia impusă între constantele C_1 şi C_2 ne conduc la un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, rezolvarea lui duce în final şi la găsirea soluţiilor *y* căutate.

Metoda variaţiei constantelor se poate aplica şi sistemelor de ecuaţii diferenţial de ordinul *n*:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Putându-se de asemenea extinde şi la sisteme canonice de forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Utilizând ecuaţiile imediat anterioare se pot stabili cele şase ecuaţii ale teoriei perturbaţiilor:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{n^2}\frac{\partial R}{\partial \tau} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1-e^2}{n^2a^2e}\frac{\partial R}{\partial \tau} \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \theta'} - \frac{\tan i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{d\theta'}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{2}{n^2a}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-e^2}{n^2a^2e}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\} \quad (a - f)$$

unde s-a făcut notaţia $n=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$.

În finalul acestui subcapitol să calculăm, folosind ecuaţiile teoriei perturbaţiilor de mai sus, avansul de periheliu ca un exemplu.

Avem prin urmare:

$$\theta' = \theta + \omega t \qquad F = -\frac{\mu}{r^3} + \frac{C}{r^4} \quad R = \frac{\mu}{2r^2} - \frac{C}{4r^3}$$

unde:

F – este forţa gravitaţională care apare în sistemele neinerţiale

R – funcţia de potenţial din care derivă forţa de mai sus

Din formula (e) vom avea:

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}F\frac{\partial r}{\partial e} + \frac{\tan i/2}{\sin(\theta+\omega)}$$

unde s-a ţinut seama de ecuaţia (d). Derivata $\partial r/\partial e$ se calculează din expresia $r = a(1-e\cos u)$:

$$\frac{\partial r}{\partial e} = a\left(-\cos u + e\sin u\frac{\partial u}{\partial e}\right)$$

din ecuaţia Kepler se obţine:

$$u - e\sin u = n(t-\tau), \qquad (u-e\cos u)\frac{\partial u}{\partial e} = \sin u$$

rezultat care înlocuit în expresia $\partial r/\partial e$ conduce la:

$$\frac{\partial r}{\partial e} = a\left(-\cos u + \frac{e\sin^2 u}{1-e\cos u}\right) = a\frac{-\cos u + e}{1-e\cos u}$$

Ecuaţia (e) devine astfel:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left[-\frac{\mu}{r^3} + \frac{C}{r^4}\right]a\frac{-\cos u + e}{1-e\cos u} + \frac{\tan i/2}{\sin(\theta+\omega)}$$

făcând schimbarea de variabilă $t \to u$ vom avea:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left[-\frac{\mu}{r^3} + \frac{C}{r^4}\right]a\frac{-\cos u + e}{1-e\cos u}\frac{1-e\cos u}{n} + \frac{\tan i/2}{\sin(\theta+\omega)}\frac{1-e\cos u}{n}$$

desfăcând parantezele rezultă:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae}\frac{\cos u - e}{(1-e\cos u)^3} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\frac{\cos u - e}{n}\frac{C}{r^4} + \frac{\tan i/2}{\sin(\theta+\omega)} - \frac{1-e\cos u}{n}$$

Ţinând seama de faptul că:

$$\frac{r}{a}=1-e\cos u$$

şi:

$$\frac{C}{r^4}=\frac{C_1(C_1+2C_0)}{r^4}=\frac{\omega^2 r^4+2\omega\dot{\theta}r^4}{r^4}$$

vom avea:

$$\delta\overline{\omega}=I^1+I^2+I^3$$

unde:

$$I^1=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}}{ae}\frac{\cos u-e}{(1-e\cos u)^3}du=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}}{ae}\frac{-(1-e\cos u)+1-e^2}{(1-e\cos u)^3}du$$

sau:

$$I^1=\frac{\sqrt{1-e^2}}{ae^2}\left[-I_2+(1-e^2)I_3\right]$$

în care I_2 şi I_3 se calculează după formula generală:

$$I_n=\int_0^{2\pi}\frac{du}{(1-e\cos u)^n}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{(1-e\cos u)^n}$$

Pentru a rezolva această integrală se fac schimbările succesive de variabile:

$$\tan\frac{u}{2}=z,\quad u=2\arctan z\Rightarrow$$

$$z=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$$

În urma cărora se obţine sub integrală o funcţie polinomială mult mai uşor de integrat:

$$I_n=\frac{1}{(1-e^2)^{n-\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\varphi)^{n-1}d\varphi\Rightarrow$$

din care:

$$I_1=\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}},\qquad I_2=\frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}},\qquad I_3=\frac{(2+e^2)\pi}{(1-e)^{5/2}}\Rightarrow$$

iar rezultatul primei integrale va fi:

$$I^1=\frac{\pi}{a(1-e^2)}$$

celelalte două integrale se calculează mult mai direct şi au expresiile:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1- e^2}}{n^2 a e}(- \cos u + e)\left[\omega(\omega + 2\dot{\theta})\right] du = \frac{a^2\sqrt{1- e^2}}{\mu} 2\pi\left[\omega(\omega + 2\dot{\theta})\right]$$

$$I^3 = \int_0^{2\pi} \frac{\tan i/2}{\sin(\dot{\theta} + \omega)} \frac{1- e\cos u}{n} du = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\tan i/2}{\sin(\dot{\theta} + \omega)}$$

iar avansul de periheliu va fi:

$$\delta\overline{\omega} = \frac{\pi}{a(1- e^2)} + \frac{2\pi a^2\sqrt{1- e^2}}{\mu}\left[\omega(\omega + 2\dot{\theta})\right] + 2\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{\dot{\theta} + \omega} \frac{\tan i/2}{\sin i}$$

Vom considera acum $\mu = KM$, cu $K = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 / kg^2$ şi $M = 1.989 \cdot 10^{30} kg$, viteza unghiulară mică a galaxiei noastre ω de -0”,0068/an şi următoarele date din anuarul astronomic, v. Tab. III.I.

Planete	a($\cdot 10^9$ m)	E	Rev/ secol	Înclinarea (grade)	Avansul observat (arcsec/ secol)	Avansul calculat TRG (arcsec/ secol)
Mercur	57.9	0.206	414.9378	7.004	43.1+/- 0.5	43.09
Venus	108.2	0.0070	162.6016	3.394	8.4+/- 4.8	8.78
Terra	149.6	0.0170	100	0	5.0+/- 1.2	3.89

Vom găsi nişte rezultate deconcertante. De pildă, pentru Mercur vom găsi o valoare a avansului de periheliu de $1.95 \cdot 10^{18}$ arcsec/sec . Acest rezultat se datorează termenului din dreapta-mijloc. Aceeaşi situaţie este şi în cazul celorlalte planete din tabel. Valorile calculate cu formula de mai sus sunt prea mari pentru a putea fi luate în considerare, [3].

Tab.III.I

III.4 Problema celor n corpuri în repere neinerţiale

Să studiem mişcarea unui sistem de n particule în sistemul de referinţă S_0, care execută o mişcare de rotaţie descrisă de vectorul $\boldsymbol{\omega}$. Ecuaţiile mişcării sistemului sunt:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \boldsymbol{\Phi}_i - m_i\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i) + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}_i\right]$$

(III.1)

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}_{ik},\ i=\overline{1,n},\ k\neq i$$

unde: m_i - masa particulei i; $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{e}_1 + y_i\mathbf{e}_2 + z_i\mathbf{e}_3$ - poziţia vectorului în S_0;
$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \dot{x}_i\mathbf{e}_1 + \dot{y}_i\mathbf{e}_2 + \dot{z}_i\mathbf{e}_3$ - viteza în S_0; $\mathbf{F}_i$ - rezultanta forţelor externe; $\boldsymbol{\Phi}_i$ - rezultanta forţelor interne; $\boldsymbol{\Phi}_{ik}$ - forţa internă care este exercita asupra particulei P_i de către particula P_k; $\mathbf{e}_i$ - vector fixat în S_0 astfel încât:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik},\quad (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = 1,\qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Forţele interne satisfac relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}_{ik} + \boldsymbol{\Phi}_{ki} = \mathbf{0},\qquad \boldsymbol{\Phi}_{ik} = \lambda\overrightarrow{P_iP_k}\ \ \lambda\in\Re \\ &\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0} \end{aligned}\right\}$$

(III.2)

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0}$$

Pentru a simplifica scrierea ecuaţiilor (III.1) introducem vectorul:

$$\mathbf{A}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i$$

(III.3)

Astfel încât ecuaţiile (III.1) capătă forma:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{A}_i\right) = \mathbf{F}_i + \boldsymbol{\Phi}_i - \boldsymbol{\omega}\times m_i\mathbf{A}_i$$

(III.4)

Luând în considerare (III.3) vom avea:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{A}_G \\ \mathbf{A}_G = \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_G \\ m = \sum_{i=1}^{n} m_i \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.5)}$$

unde $\mathbf{r}_G$ reprezintă poziţia centrului de masă G al sistemului de particule.

Ţinând seamă de (III.4) şi (III.5) rezultă prin sumare:

$$\frac{d}{dt}\left\{ m_i \mathbf{A}_G \right\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i - \omega \times m \mathbf{A}_G \qquad \text{(III.6)}$$

ecuaţie care reprezintă ecuaţia de mişcare a centrului de masă. Se observă că pentru $\omega = 0$ se obţine rezultatul clasic.

Înmulţim scalar ecuaţia (III.4) cu $\dot{\mathbf{r}}_i$ şi sumând vom obţine:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{ \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_i} \mathbf{A}_{\mathrm{i}}^2 \right\} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathbf{F}_{\mathrm{i}} + \Phi_{\mathrm{i}}) \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\omega} \left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathbf{r}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{F}_{\mathrm{i}} \right)$$

deoarece

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0}$$

Introducând acum funcţiile de potenţial U_1 şi U_2 de variabile x_i, y_i, z_i astfel încât să fie satisfăcute relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_i = grad_i U_1, \qquad \boldsymbol{\Phi}_i = grad_i U_2 \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.7)}$$

se obţine imediat integrala primă a energiei:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{A}_i^2 - (U_1 + U_2) = h \qquad \text{(III.8)}$$

unde h este o constantă ce se determină din condiţiile iniţiale.

Înmulţind scalar ecuaţia (III.6) cu $\mathbf{A}_G$ obţinem:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{A}_G^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\right)\mathbf{A}_G$$

(III.9)

Să considerăm acum un nou sistem de referinţă $\mathcal{S}_n$ centrat in punctul P_n şi având axele paralele cu cele ale sistemului $\mathcal{S}_0$. Faţă de acest nou sistem de inerţie vom avea coordonatele:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0, \qquad \mathbf{R}_0 = -\mathbf{r}_n$$

unde $\mathbf{R}_i$ descriu coordonatele particulelor P_i în sistemul $\mathcal{S}_n$ iar $\mathbf{R}_0$ mişcarea centrului *O* al sistemului $\mathcal{S}_0$ faţă de $\mathcal{S}_n$.

Să mai facem notaţiile:

$$\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{\Phi}_i^* + \mathbf{\Phi}_{in}, \qquad \mathbf{\Phi}_i^* = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{\Phi}_{ik}, \qquad i,k = \overline{1,n-1}, \qquad k \neq i$$

unde forţele interne ale sistemului format din celelalte *n-1* particule au fost sumate forţelor externe ce acţionează asupra aceluiaşi sistem.

Ecuaţiile (III.4) în această situaţie vor deveni:

$$\frac{d}{dt}\left[m_i(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_0)\right] = \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_{in} + \mathbf{\Phi}_i^* - \boldsymbol{\omega}\times m_i(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_0)$$

(III.10)

din care prin sumare vom obţine:

$$\frac{d}{dt}\left[M\mathbf{A}_0\right] = -\mathbf{F}_n + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{\Phi}_{kn} - \boldsymbol{\omega}\times M\mathbf{A}_0, \qquad i = \overline{1,n-1} \quad \text{(III.11)}$$

şi:

$$\frac{d}{dt}\left[m(\mathbf{A}_G - \mathbf{A}_0)\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i - \boldsymbol{\omega}\times m(\mathbf{A}_G - \mathbf{A}_0) \quad \text{(III.12)}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{m\mathbf{A}_G - \left(\sum_{i=1}^{n-1}m_i\right)\mathbf{A}_0\right\} = \sum_{i=1}^{n-1}(\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_{in}) - \boldsymbol{\omega}\times\left\{m\mathbf{A}_G - \left(\sum_{i=1}^{n-1}m_i\right)\mathbf{A}_0\right\}$$

(III.13)

în care s-au folosit notaţiile:

$$\mathbf{A}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_i, \qquad \mathbf{A}_0 = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{A}_G = \ddot{\mathbf{R}}_G + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_G, \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{0}, \qquad m_n = M$$

Să considerăm că sistemul centrului de masă coincide cu sistemul $\mathcal{S}_0$, care este un sistem de referinţă inerţial. Din (III.2) vom obţine condiţia:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad \text{(III.14)}$$

împreună cu care din ecuaţia (III.13) vom obţine (III.11).

Din (III.10) şi (III.11) găsim:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n-1} m_i(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_G)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n-1}(\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_{in})\mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{i}}^{*}\mathbf{A}_i - \sum_{i=1}^{n-1}(\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{i}}^{*})\mathbf{A}_G - \left(\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{\Phi}_{in}\right)\mathbf{A}$$

,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M\mathbf{A}_G^2\right) = -\mathbf{F}_n\mathbf{A}_G + \left(\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{\Phi}_{in}\right)\mathbf{A}_G$$

Adunând aceste două ecuaţii, făcând reducerile de rigoare, ţinând cont de (III.14) vom obţine:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n-1} m_i(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_G)^2 + M\mathbf{A}_G^2\right\} = \sum_{i=1}^{n-1}(\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_{in})\mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{i}}^{*}\mathbf{A}_i \text{ (I}$$

II.15)

Ecuaţiile (III.10) şi (III.11) pot fi scrise sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{A}_i\right) = \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i - \boldsymbol{\omega}\times m_i\mathbf{A}_i - \frac{m_i}{M}(\mathbf{F}_n + \mathbf{\Phi}_n) \qquad \text{(III.16)}$$

iar (III.15) devine adunând termenii din partea dreaptă:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n-1} m_i\mathbf{A}_i^2 - m_i\mathbf{A}_G^2\right\} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i)\mathbf{A}_i, \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{0}$$

Ultimele două ecuaţii descriu dinamica unui sistem de n particule într-un sistem neinerţial în cazul cel mai general. Să explicităm acum aceste ecuaţii pentru cazul de interes pentru noi, cel al mişcării a *n* corpuri cereşti într-un sistem de referinţă neinerţial.

Să considerăm aşadar un sistem izolat de n particule. Acestea se atrag reciproc în conformitate cu legea newtoniană, a forţei atractive proporţională cu produsul maselor fiecărei perechi de particule şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele. De asemenea rezultanta forţelor interne a sistemului este nulă şi sistemul de referinţă legat de sistemul centrului de masă execută o

mişcare de rotaţie în raport cu un sistem de referinţă inerţial, descrisă de vectorul **ω**, aşa cum se arată în [4].

Ecuaţiile de mişcare ale sistemului (III.16) devin astfel:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{A}_i\right) = \sum_{k=1}^{n} f\frac{m_i m_k}{r_{ik}^3}\mathbf{r}_{ik} - \boldsymbol{\omega}\times m_i\mathbf{A}_i,\ i=\overline{1,n},\ k\neq i \tag{III.17}$$

unde f este constanta atracţiei universale şi:

$$\mathbf{r}_i = \overrightarrow{GP_i} = x_i\mathbf{e}_1 + y_i\mathbf{e}_2 + z_i\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{r}_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$\mathbf{r}_i = \overrightarrow{P_iP_k} = (x_k - x_i)\mathbf{e}_1 + (y_k - y_i)\mathbf{e}_2 + (z_k - z_i)\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{r}_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2$$

sunt coordonatele punctelor în raport cu sistemul centrului de masă şi distanţele între ele.

Înmulţind scalar ecuaţia (III.17) cu $\mathcal{A}_i$ şi ţinând cont de (III.7) obţinem integrala primă a energiei:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{A}_i^2 - U_1 = h \tag{III.18}$$

unde

$$U_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\frac{m_i m_k}{r_{ik}},\qquad k\neq i \tag{III.19}$$

este potenţialul gravitaţional.

Să scriem acum ecuaţiile mişcării celor *n-1* puncte materiale în raport cu referenţialul $\mathcal{S}_n$ care are originea în al *n*-lea punct şi care are axele paralele cu cele ale sistemului $\mathcal{S}_G$. Notaţiile se păstrează ca şi în cazul general.

Ecuaţiile (III.10) şi (III.11) vor deveni:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_G)\right) = f\frac{Mm_i}{r_i^3}\mathbf{r}_i + \sum_{k=1}^{n-1} f\frac{m_i m_k}{r_{ik}^3}\mathbf{r}_{ik} - \boldsymbol{\omega}\times m_i(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_G),$$

(III.20)

$$\frac{d}{dt}\left(M\mathbf{A}_G\right) = -\sum_{k=1}^{n-1} f\frac{Mm_k}{r_k^3}\mathbf{r}_k - \boldsymbol{\omega}\times M\mathbf{A}_G \tag{III.21}$$

din pricina faptului că:

$$\sum_{k=1}^{n-1} m_k(\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_G) = M\mathbf{A}_G$$

Urmând aceiaşi paşi logici ca şi în cazul general, ţinând cont şi de (III.15), ecuaţiile (III.20) şi (III.21) vor avea integrala primă:

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} m_i(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_G)^2 + M\mathbf{A}_G^2\right] - U_2 = h \qquad \text{(III.22)}$$

unde:

$$U_2 = \sum_{i=1}^{n-1} f\frac{Mm_i}{r_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f\frac{m_i m_k}{r_{ik}}, \qquad k \neq i \qquad \text{(III.23)}$$

Ecuaţia (III.16) în acest caz poate fi scrisă :

$$\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{A}_i) = -f\frac{m_i(m_i+M)}{r_i^3}\mathbf{r}_i + \sum_{k=1}^{n-1} f\frac{m_i m_k}{r_{ik}^3}\mathbf{r}_{ik} - \sum_{k=1}^{n-1} f\frac{m_i m_k}{r_k^3}\mathbf{r}_k - \boldsymbol{\omega}\times m_i\mathbf{A}_i$$
$$i = \overline{1, n-1}, \quad k \neq i$$

Se observă că pentru $\omega = 0$ acestea coincid cu cele care descriu mişcarea în sisteme inerţiale.

Referinţele capitolului III

[1] M. B. Răuţ- „On advance of perihelion in a non-inertial frame of reference two body problem”, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LI(LV)**, no. 1-2, 57-62, 2005;
[2] J. Chazy – „Mécanique céleste”, Presses Univesitaires de France, Paris, 1953;
[3] M. B. Răuţ- „The spatial elliptical movement in a non-inertial frame of reference”, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LV(LIX)**, no. 2, 25-36, 2009.
[4] C. I. Borş – „Relativistic models for the n body problem in a non-inertial frames”, Lucrările Seminarului matematic „Al. Myller”, **4**, 1994.

Capitolul IV
O abordare newtoniană a dinamicii galaxiilor din perspectiva materiei întunecate

IV.1 Introducere

Dinamica galaxiilor este în mod curent una din problemele majore ale teoriei gravitaţiei, de la descoperirea sa, în prima jumătate a secolului XX, [1, 2]. Majoritatea galaxiilor execută în jurul centrelor lor de masă o mişcare de rotaţie care are câteva caracteristici distinctive (v. fig. IV.1).

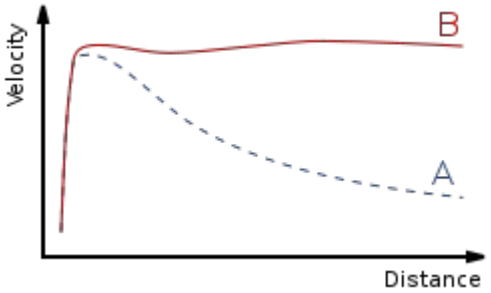


fig. IV.1

Dacă materia din care sunt constituite galaxiile s-ar supune doar legii gravitaţiei newtoniene, atunci curbele rotaţiei lor ar arăta ca porţiunea punctată a graficului. Galaxiile s-ar roti precum nişte fluide ideale, mai repede către centru şi din ce în ce mai lent către margini. Dar, în realitate, (graficul desenat cu linie continuă) rotaţia galaxiilor are loc ca şi cum acestea ar fi nişte corpuri rigide. De la o anumită distanţă de centrul lor, numită rază critică, viteza radială a galaxiilor devine practic independentă de rază.

De-a lungul timpului au fost câteva încercări de a explica această caracteristică a rotaţiei galaxiilor. Cronologic, prima ar fi existenţa materiei întunecate, [3]. Materia întunecată acţionează ca un liant pentru materia obişnuită din care sunt constituite galaxiile şi mişcarea de rotaţie rezultantă este cea observată. Din punct de vedere strict experimental trebuie să fie îndeplinită relaţia empirică a lui Tully-Fisher. Corespunzător acesteia, $v \propto M^{\beta}$, unde $\beta = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, v fiind viteza radială şi M masa galaxiei. Exponentul β reprezintă un interval de valori, nu valorile extreme ale unui interval. Valori diferite pentru acest exponent apar când observaţiile sunt făcute în benzi de lungimi de undă diferite, [4].

Teoria care explică forma curbelor de rotaţie ale galaxiilor din perspectiva materiei întunecate nu ia în considerare relaţia Tully-Fisher. Aceleaşi comentarii pot fi atribuite şi teoriei bazate pe relativitatea generală, teorie ce încearcă să explice acelaşi fenomen. Această teorie nu are nevoie de materia întunecată pentru a explica forma curbelor de rotaţie ale galaxiilor, [5]. Nici teoria bazată pe versiunea Weyl-Dirac a gravitaţiei, [6]. Ambele explică forma curbelor de rotaţie dar nu consideră datele experimentale în detaliu.

Comentariile anterioare nu sunt valabile în cazul teoriei MOND. Teoria dinamicii newtoniene modificate ia în considerare valorile experimentale, dar într-un grad de acurateţe nu prea mare. MOND consideră doar $\beta = \frac{1}{4}$ ca valoare reprezentativă pentru o bandă de lungimi de undă ce caracterizează o varietate mare a maselor galaxiilor, [7].

Cu excepţia acestui fapt teoria MOND prezintă câteva dezavantaje majore. Întâi de toate este o teorie efectivă, nu aduce justificări cauzale de ordin fizic pentru a elucida comportamentul galaxiilor în rotaţie. MOND postulează doar legile dinamicii newtoniene modificate şi nu dintr-o perspectivă fizică. Această teorie prezintă doar câteva valori empirice, postulate, pentru parametrii ce caracterizează mişcarea şi forma câtorva tipuri diferite de galaxii. Şi cam atât.

Scopul prezentului subcapitol este să corecteze cumva aceste dezavantaje. Întâi de toate intenţionăm să luăm în calcul întregul interval, $\beta = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$, în evaluările noastre teoretice. Apoi să dăm teoriei noastre o semnificaţie fizică.

IV.2 Forţe atractive şi dinamica galaxiilor

În cele ce urmează presupunem că putem obţine o teorie care să explice forma curbelor de rotaţie ale galaxiilor discoidale, o teorie bazată pe nişte forţe atractive necunoscute. Este, desigur, o situaţie nouă în această privinţă, până acum responsabila pentru mai sus-amintitele curbe a fost, în virtutea teoriei materiei întunecate, această materie exotică ce "leagă" materia obişnuită şi o forţează să se rotească precum un corp rigid.

De aceea vom avea un potenţial gravitaţional de forma:

$$\Phi = \frac{GM}{r} - \frac{A}{\alpha + 1} r^{\alpha + 1} \quad \text{(IV.1)}$$

care este rezultatul rezolvării ecuaţiei Poisson:

$$\Delta\Phi = 4\pi G(\rho + \rho_{ue}) \quad \text{(IV.2)}$$

Al doilea termen din dreapta ecuaţiei (IV.1) este un termen empiric ataşat potenţialului gravitaţional newtonian, termen care descrie acţiunea unui potenţial gravitaţional atractiv. Avem, de aceea, A> 0.

Cu acest potenţial (IV.1) încercăm să arătăm că forţele atractive care rezultă din el pot produce mişcarea galaxiilor observată în realitate. Din (IV.1) găsim expresia primei derivate a acestei ecuaţii, acceleraţia:

$$g = -\frac{GM}{r^2} - Ar^{\alpha} \quad \text{(IV.3)}$$

care are mare importanţă în dezvoltarea raţionamentului în cele ce urmează. Acceleraţia gravitaţională (IV.3) este în

întregime atractivă şi este echilibrată de acceleraţia centrifugă a galaxiei, care este repulsivă. Să presupunem că nici una dintre ele nu va înclina balanţa echilibrului într-un fel sau altul, deci la echilibru va trebui să avem:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} + Ar^{\alpha}$$

(IV.4)

care conduce, după o evidentă înmulţire cu r, la o expresie mai simplă:

$$v^2 = \frac{GM}{r} + Ar^{\alpha+1}$$

(IV.5)

Din observaţiile mişcării galaxiilor şi din expresia empirică Tully-Fisher rezultă $v \propto L^{\beta} \propto M^{\beta}$, unde L este luminozitatea şi $\beta = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

Deci acum putem determina empiric coeficientul α potrivit în două cazuri, corespunzătoare celor două expresii ale potenţialului (IV.1) care asigură reprezentarea formei curbelor de rotaţie ale galaxiilor discoidale corespunzătoare observaţiilor. De aceea vom avea:

$$v \propto M^{\frac{1}{3}}$$

(IV.6)

şi cazul de care suntem cu precădere interesaţi:

$$v \propto M^{\frac{1}{4}}$$

(IV.7)

Raza critică de la care viteza radială $v(r) = const.$ rezultă din condiţia:

$$\frac{\partial v(r)}{\partial r} = 0$$

Deci, expresia (IV.5) devine:

$$0 = -\frac{GM}{r_c^2} + (\alpha + 1) A r_c^{\alpha}$$

şi raza critică este:

$$r_c = \left(\frac{GM}{(\alpha+1)A} \right)^{1/\alpha+2}$$

(IV.8)

Aceasta este raza de la care viteza va fi independentă de distanţă:

$$v = A^{\frac{1}{\alpha+4}} (GM)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+4}} [(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+2}} + (\alpha+1)^{-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}]^{1/2}$$

(IV.9)

Pentru a fi în acord cu observaţiile, condiţiile (IV.6) şi (IV.7), trebuie să avem:

$$\frac{\alpha+1}{\alpha+4} = \gamma$$

cu γ=1/3 şi γ=1/4. Cu aceste restricţii găsim două valori pentru α, respectiv 1/2 şi 0. Cazul corespunzător lui α=0 conduce la:

$$v = \sqrt[4]{4GMA}$$

(IV.10)

o valoare independentă de rază. În aceste condiţii ecuaţia (IV.10) este valabilă fără a mai fi nevoie să considerăm altă teorie pentru a explica forma curbelor de rotaţie ale galaxiilor. Dacă admitem că A se datorează în totalitate unor alte cauze, neavând nici o legătură cu masa totală a galaxiilor, ci doar cu dinamica lor internă, fiind o constantă specifică fiecărei galaxii în parte, atunci tot ceea ce am discutat până acum este valabil.Valoarea generală A poate fi determinată din curbele experimentale. Uimitor, dacă vom proceda astfel, vom găsi $4A = a_0$ (care a fost deasemenea determinată din curbele experimentale, ca o valoare mediată, pentru galaxiile discoidale). În acest caz a_0, [7], nu poate fi concepută la fel ca în teoria MOND ci ca o caracteristică galactică fără nici o legătură cu expansiunea universului.

Diferenţa faţă de teoria MOND pare a fi valoarea dublă a razei critice:

$$r_c = 2\left(\frac{GM}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(IV.11)

Dar forma (IV.11) poate fi evitată dacă luăm $A = a_0$. Ne conduce neaşteptat de aproape de teoria MOND, din perspectiva razei critice, dar viteza radială este un pic mai mare decât în teoria MOND. Într-adevăr, dacă vom considera $A = a_0$ obţinem din (IV.10) exact:

$$v^4 = 4GMa_0$$

(IV.12)

care este binecunoscuta expresie obţinută în teoria MOND pentru vitezele radiale independente de razele galaxiilor, înmulţită cu 4, un amănunt ce pare a prezenta o importanţă scăzută. Ce e important aici este faptul că am obţinut aceste rezultate în aproximaţia:

$$g = g_N + a_0$$

şi nu în aproximaţia:

$$g = (g_N \cdot a_0)^{1/2}$$

ca în teoria MOND. Diferenţa decurge din faptul că în teoria noastră nu s-a lucrat cu o expresie a inerţiei modificate, ca în teoria MOND, legea a II-a a lui Newton rămânând neschimbată. Deci cu (IV.1) şi (IV.7) câteva din rezultatele teoriei MOND pot fi obţinute, fără a mai fi nevoie să modificăm legea inerţiei. Trebuie doar să schimbăm definiţia constantei a_0 ca o caracteristică a galaxiilor, presupusă a fi atribuită unor cauze necunoscute. În particular, dacă această acceleraţie este direct legată de materia întunecată, ca o proprietate a ei, atunci a_0 trebuie să fie o constantă universală. Este independentă de cantitatea de materie întunecată existentă într-o galaxie sau alta. Ne-am putea gândi chiar că micile deviaţii de la această valoare s-ar putea datora doar formei fiecărei galaxii în parte. Modul cum materia întunecată este distribuită diferă de la o galaxie la alta, deci constanta A (sau a_0) trebuie să fie diferită.

Această acceleraţie poate explica anomalia navei Pioneer 10, deasemenea. Există o forţă atractivă constantă în galaxia noastră, suplimentară celei newtoniene, datorată direct unei tendinţe de comprimare a galaxiei, din nişte cauze necunoscute sau din pricina materiei întunecate. Ecuaţia (IV.4) este valabilă datorită faptului că forţele

atractive se opun tendinţei de dispersare produsă de rotaţie. Însă toate aceste comentarii sunt valabile doar dacă potenţialul este (IV.1) pentru α=0.

IV.3 Verificarea ecuaţiei Poisson

Al doilea caz pe care-l discutăm acum corespunde coeficientului α=1/2. Urmând aceeaşi paşi ca şi în cazul precedent, din (IV.8) găsim:

$$r_c = \left(\frac{2GM}{3A} \right)^{2/5}$$

(IV.13)
pentru raza critică, şi din (IV.9):

$$v = A^{\frac{2}{9}} (GM)^{\frac{1}{3}} [(3/2)^{2/5} + (2/3)^{1/3}]^{1/2}$$

(IV.14)
pentru viteza radială, rezultate care trebuie să se potrivească datelor experimentale. Constanta A nu mai este, de această dată, o acceleraţie. Acceleraţia indusă de cauza necunoscută creşte acum cu raza. Pentru aceeaşi magnitudine a constantei A ca în cazul precedent, rezultă valori crescute pentru raza critică şi viteza radială.

Problema acum e care din cele două cazuri e corect din punctul de vedere al ecuaţiei Poisson. Potenţialul (IV.1) pentru α=0 nu are alte surse, exceptând materia normală. Chiar dacă verifică ecuaţia Poisson (IV.2), deci este un potenţial gravitaţional valid, poate fi creat doar de materia normală. Ironia este că am găsit aproximativ aceleaşi relaţii ca în teoria MOND şi trebuie să concluzionăm că dinamica newtoniană modificată este corectă principial. Absenţa unei cauze fizice şi valabilitatea cazului (IV.7) fac posibile aceste rezultate. Corespunzător, există o echivalenţă între teoria MOND şi teoria noastră, a unui potenţial newtonian modificat, (IV.1) pentru α=0, pe care am expus-o succint anterior. Acesta este motivul pentru care teoria MOND este o teorie efectivă şi nu o teorie fizică, potenţialul (IV.1) pentru α=0 nu are alte surse decât materia normală.

De aceea, dacă dorim să luăm în considerare efectele unei cauze necunoscute asupra materiei galactice normale trebuie să considerăm al doilea caz, potenţialul (IV.1)

pentru α=1/2. Poate avea materia întunecată ca sursă, altminteri ecuaţia Poisson (IV.2) nu ar mai avea sens. Acesta este motivul pentru care o teorie newtoniană bazată pe un potenţial newtonian modificat care să poată descrie mişcarea galaxiilor datorită materiei întunecate este acest caz, pentru care:

$$A = -4\pi G\rho_{dm}r^{1/2}$$

(IV.15)

Constanta A descreşte/creşte proporţional cu densitatea materiei întunecate, deci este o caracteristică a fiecărei galaxii în parte. Şi avem, în final, o teorie newtoniană care descrie, aproape de realitate, efectele materiei întunecate asupra dinamicii galaxiilor. Cu excepţia unui singur amănunt: semnul minus din ecuaţia (IV.15). Singura justificare fizică a lui este că densitatea materiei întunecate provine dintr-o presiune negativă:

$$p = -\rho_{dm}\cdot v^2$$

(IV.16)

ca rezultat al interacţiei dintre particulele de materie întunecată în mişcare, între ele, într-un fluid compresibil omogen, cu compresibilitate negativă. Expresia (IV.16) este una intuitivă, deoarece forţa gravitaţională normală trebuie să fie rezultatul mişcării materiei normale în fluidul de materie întunecată:

$$p = -\rho\cdot v^2$$

(IV.17)

Acesta este şi motivul pentru care vitezele în ecuaţiile (IV.16) şi (IV.17) pot să nu fie aceleaşi.

IV.4 Forţele repulsive şi dinamica galaxiilor

Dacă natura este mai surprinzătoare decât ne-am aştepta şi materia normală reuşeşte cumva să genereze un potenţial gravitaţional de forma (IV.1) pentru α=0, va produce datele observaţionale care apoi vor fi greşit interpretate ca efecte ale materiei întunecate. De fapt, datele experimentale de care dispunem, în ambele forme (IV.6) şi (IV.7), pot da uşor naştere la interpretări eronate. Potrivit acestui model, doar datele experimentale în forma

(IV.6) pot fi atribuite materiei întunecate. Restul se pot datora unor alte cauze. Care sunt aceste cauze, nu ştim încă. Dar în cele ce urmează vom arăta că ceea ce explică toate datele experimentale ar putea fi materia întunecată.

Potrivit [8] materia obişnuită reuşeşte să descrie dinamica unor galaxii în formă de spirală, în absenţa materiei întunecate, dar de astă dată printr-un potenţial gravitaţional repulsiv. Acest potenţial este cumva echivalent, în modelul nostru, cu potenţialul:

$$\Phi = \frac{GM}{r} + \frac{B}{\alpha+1} r^{\alpha+1}$$

(IV.18)

pentru valorile α care vor fi calculate pentru a îndeplini cerinţele experimentale. Ecuaţia (IV.18) este rezultatul rezolvării ecuaţiei Poisson:

$$\Delta\Phi = 4\pi G(\rho + \rho_{ue})$$

Termenul ρ_{ue} este numit, generic, densitate de energie necunoscută. Este clar că această energie trebuie să fie diferită de energia materiei întunecate deoarece nu putem concepe materia întunecată manifestându-se ca un potenţial gravitaţional repulsiv. Deci, pentru a avea o descriere a dinamicii galactice, care să implice materia întunecată, trebuie să considerăm, deocamdată, doar potenţialul (IV.1) pentru α=1/2.

În ceea ce priveşte potenţialul (IV.18), echilibrul acceleraţiilor este:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} - Br^{\alpha}$$

care este diferit de (IV.4). În ideea de a scrie corect echilibrul tuturor acceleraţiilor implicate în dinamica galaxiilor în acest caz trebuie să considerăm, iarăşi, contribuţia materiei întunecate. Dacă vom concepe galaxia plină de un fel de materie care reacţionează cu o acceleraţie opusă tendinţei de expansiune a galaxiei, dată de rotaţie, atunci această materie poate fi materia întunecată. De aceea vom avea:

$$a = -\frac{GM}{r^2} + Br^{\alpha} - Br^{\alpha} + \frac{v^2}{r}$$

(IV.19)

La a=0, după ce se atinge valoarea razei critice:

$$0 = -\frac{GM}{r_c^2} + Br_c^{\alpha} - Br_c^{\alpha} + \frac{v^2}{r_c}$$

(IV.20)

putem găsi condiţiile de echilibru pentru care putem determina expresiile razei critice şi a vitezei radiale. Deci, din:

$$\frac{GM}{r_c^2} = br_c^{\alpha}$$

(IV.21)

expresia razei critice va fi:

$$r_c = \left(\frac{GM}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}$$

(IV.22)

Atingând această valoare echilibrul galaxiei nu va fi stabilit până când nu vom considera:

$$\frac{v^2}{r_c} = br_c^{\alpha}$$

rezultat care conduce, luând în considerare (IV.22), la:

$$v = b^{\frac{1}{\alpha+4}}(GM)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+4}}$$

(IV.23)

Restricţiile experimentale (IV.6) şi (IV.7), în ecuaţia (IV.23), conduc la aceleaşi cazuri, α=0 şi α=1/2. Dacă $b \neq B$ ecuaţiile (IV.22) şi (IV.23) nu au sens. Constanta generală $b \in R^+$ indică o forţă repulsivă adiţională faţă de cea presupusă, Br^{α}. Deci cazul b=B este singurul valabil.

Aşa încât, după ce înlocuim constanta B cu a_0 şi α=0, putem determina viteza radială a galaxiei ca fiind:

$$v^4 = GMa_0$$

care este binecunoscuta expresie obţinută în teoria MOND pentru viteza radială independentă de raza galaxiei şi raza critică de la care apare aproximaţia micilor acceleraţii:

$$r_c = \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cazul corespunzător lui α=1/2 nu este unul valid deoarece el exprimă, prin (IV.18), o acţiune repulsivă care nu poate fi atribuită materiei întunecate.

*

Rezultatele obţinute în secţiunea precedentă sunt specifice teoriei MOND. Deci, trebuie să concluzionăm că ţelul nostru, de a găsi o teorie newtoniană care să descrie dinamica galaxiilor datorate unei tendinţe atractive, este atins dacă vom considera ambele potenţiale (IV.1) şi (IV.18) simultan, (IV.1) pentru α=1/2 şi (IV.18) pentru α=0. Mai mult decât atât, datele observaţionale de care dispunem sunt sub formă de interval, β=[1/3,1/4], deci $\alpha \in [0,1/2]$, $\alpha \in R^*$. Cazurile discutate anterior se referă doar la valorile extreme ale acestui interval, β=1/3 şi β=1/4. Pentru a descrie cât mai fidel acţiunea (reacţiunea) atractivă trebuie să stabilim care sunt limitele pentru care cazurile corespunzătoare lui (IV.1) pentru α=1/2 şi (IV.18) pentru α=0 sunt valabile. Pentru a face asta trebuie să rezolvăm ecuaţia Poisson (IV.2) cu potenţialul (IV.1). Rezultă:

$$\alpha A r^{\alpha-1} = -2\pi G \rho_{dm}$$

Din aceasta ecuaţie se observă că potenţialul (IV.1) are surse pentru $\alpha \in (0,1/2]$. Doar pentru α=0 potenţialul nu are surse şi potenţialul (IV.18) este mai potrivit pentru a descrie reacţiunea materiei întunecate în acest caz. De aceea, efectele atractive vor fi descrise complet de potenţialul:

$$\Phi = \frac{GM}{r} - \frac{A}{\alpha+1} r^{\alpha+1},\ \alpha \in (0,1/2],\ \Phi = \frac{GM}{r} + Br,\ \alpha=0 \qquad \text{(IV.24)}$$

Este un potenţial empiric, deoarece teoria prin care a fost creat are ca ţel doar corespondenţa foarte bună cu datele experimentale. Este evident că pentru materia întunecată potenţialul gravitaţional care o descrie este potenţialul (IV.24), fără valoarea corespunzătoare lui α=0. Un potenţial datorat unor cauze fizice nu poate genera simultan o acţiune şi o reacţiune.

Teoria prezentată în [8] deduce doar un potenţial tip (IV.24) pentru α=0. Este produs de materia obişnuită, ca în teoria noastră. Efectele nu pot fi cele prezentate în secţiunea IV.4, deoarece sunt mai mici decât ale unui potenţial $\propto r^2$, generat de aceeaşi materie obişnuită. Referinţa [9] nu aduce nimic nou în această chestiune, dar în privinţa [10] lucrurile par a se clarifica. Dacă aproximăm potenţialul Yukawa:

$$\Phi = \frac{Ce^{-r/r_0}}{r}$$

(IV.25)

în termenii unei serii de puteri în raport cu raza galaxiei r_0, atunci vom găsi un potenţial tip (IV.24) pentru α=0. Ecuaţia (IV.25) reprezintă potenţialul unitar, de aceea vom întâlni obstacole serioase pentru a calibra corect constantele în ideea a face ca (IV.24) să arate ca (IV.25). Dacă luăm constanta C de forma GM atunci constanta B trebuie să fie de 14 ori mai mare decât a_0 (pentru galaxia noastră).

Ţinând cont de consideraţiile de mai sus trebuie să admitem că forma (IV.24) nu poate fi momentan produsă de o teorie fizică bine fundamentată matematic.

În aceste condiţii ecuaţia (IV.24), fără forma corespunzătoare α=0, este valabilă fără a mai fi nevoie de teoria MOND care să o confirme. În acest caz constanta generală A poate fi determinată din curbele experimentale, [11].

Teoria noastră este doar o teorie efectivă, nu mai bună decât teoria MOND şi nimic mai mult. Dar implică materia întunecată pentru a explica dinamica galaxiilor. În schimb, are aceleaşi dezavantaje ca şi teoria MOND, nu rezolvă complet problema discrepanţelor de masă. Constanta A din (IV.24) depinde de mărimea galaxiei, prin urmare, în cazul unor galaxii sferice pitice şi a unor clustere galactice va prezenta o discrepanţă de masă anomală: prea mare în primul caz şi moderată în cel de-al doilea, [12]. Poate că în viitor măsurători mai exacte ale factorului de conversie masă/luminozitate, M/L, va clarifica această problemă.

Referinţele capitolului IV

[1] F. Zwicky, HPA **6**, 110-127, 1933;
[2] F. Zwicky, Astrophys. J. **86**, 217, 1937;
[3] V. C. Rubin, W. K. Ford, Astrophys. J. **159**, 379, 1970;
[4] R. B. Tully, J. R. Fisher, Astron. And Astrophys. **54**, 661-673, 1977;
[5] E. I. Cooperstock, S. Tieu, Int. J. of Mod. Phys. **A22**, 2293, 2007;
[6] S. Mirabotalebi, S. Jalalzadeh, S. Movahed, H. R. Sepangi, MNRAS **385**, 986-994, 2008;
[7] M. Milgrom, ApJ **270**, 371, 1983;
[8] A. Bhattacharya, B. Bagchi, G. Garipova, R. Isaev, A. A. Potapov, K. K. Nandi, INJP **86**, 463, 2012;
[9] A. R. El-Nabulsi, INJP **86**, 763-768, 2012;
[10] I. N. Sneddon and C. K. Thornhill, MPCPS **45**, 318-320, 1949;
[11] M. B. Răuţ, On a Newtonian alternative theory for MOND, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LVIII (LXII)**, no. 1, 1-7, 2012;
[12] M. Milgrom, Proc. of the DARK98 meeting in Heidelberg July 1998, astro-ph/9810302, 1998;

Capitolul V
Variaţia constantei gravitaţionale cu timpul în contextul expansiunii universului

V. 1. Introducere

Ideea de variaţie a unor constante fizice fundamentale a apărut o dată cu publicarea în 1937, în revista Nature, a unui articol aparţinând marelui fizician englez P. A. M. Dirac. În articolul sus-amintit se sugera posibilitatea variaţiei constantei atracţiei universale, alături de alte constante fizice fundamentale, datorită vârstei universului. În trecut constanta de atracţie universală avea o valoare mai mare, apoi valoarea acesteia a evoluat descrescător în timp, până în epoca noastră.

Acesta a fost începutul unei cariere surprinzătoare pentru ideea variaţiei constantei atracţiei universale. Până în zilele noastre s-au măsurat nenumărate valori ale acestei variaţii, s-au făcut multe ipoteze, în aşa manieră încât s-a dezvoltat o adevărată literatură de specialitate care parcă a creat un nou subdomeniu al fizicii. În tabelul V.1 se face o trecere în revistă selectivă a câtorva dintre experimentele făcute şi ipotezele în care s-a lucrat. Ce au în comun toate aceste valori? Se observă că nu există diferenţe mari între ele. Cele măsurate la distanţele sistemului nostru solar sunt apropiate de cele măsurate la distanţe cosmice, galactice şi extragalactice. Deci par oarecum credibile în ipoteza unei manifestări unitare a naturii la nivel macroscopic sau într-o ipoteză unificatoare a tuturor ipotezelor în care s-a lucrat. Ce au comun toate aceste ipoteze? Poate doar ce-am afirmat puţin mai înainte, o ipoteză unificatoare a lor. Şi care ar putea fi atunci această ipoteză? Ce-ar putea avea comun variaţia temperaturii Pământului cu variaţia razei lui, cu variaţia perioadei de rotaţie a Lunei în jurul Pământului, cu modificarea distanţelor între planetele sistemului solar, cu modificarea perioadei de pulsaţie a unor sisteme binare de pulsari sau a unor pulsari solitari,

cu modificarea evoluţiei stelare, cu nucleosinteza în diferite epoci şi variaţia constantei atracţiei universale? Singurul lor punct comun ar părea a fi doar expansiunea universului. Dacă am gândi că toate aceste efecte măsurabile s-ar datora unei singure cauze, aceasta fiind expansiunea universului, atunci am avea imaginea de ansamblu a variaţiei constantei atracţiei universale, de valori apropiate la toate nivelurile la care s-au făcut măsurătorile.

Am putea chiar să gândim puţin mai departe de atât, şi anume, ţinând cont de toate aceste valori experimentale, în ipoteza care le-a generat pe toate, expansiunea universului, care ar putea fi starea universului potrivit acestor date observaţionale? Este el în expansiune veşnică sau nu?

La aceste întrebări vom încerca să răspundem în cadrul acestui capitol. Vom compara deci valorile diferitelor variaţii ale constantei atracţiei universale cu nişte valori de referinţă, pe care trebuie să le găsim, şi în urma acestei comparaţii vom decide care este starea universului în ceea ce priveşte expansiunea sau recesiunea. Problema cea mare aici pare a fi care sunt acele valori de referinţă. Dacă am găsi, de exemplu, o valoare de referinţă pentru variaţia constantei atracţiei universale corespunzătoare unui univers static şi apoi o altă valoare de referinţă pentru un univers în expansiune veşnică, atunci se pare că am rezolvat problema. Valorile mai mari ale variaţiei constantei atracţiei universale decât valoarea de referinţă pentru universul static ar corespunde aşadar unui univers în recesiune, iar valorile mai mici unui univers în expansiune veşnică.

Să detaliem în cele ce urmează aceste idei şi să începem prin a stabili valorile de referinţă.

V. 2 Echivalentul newtonian al constantei cosmologice

Vom arăta în cele ce urmează cum putem atinge acest deziderat. Pentru aceasta vom deduce prima ecuaţie a lui Friedmann utilizând potenţialul gravitaţional modificat (IV.18) şi $\alpha=1$, urmând un raţionament newtonian. În mod

normal, ecuaţia Friedmann se obţine din relativitatea generală. Cel care a arătat că prima ecuaţie Friedmann se poate deduce din mecanica newtoniană a fost Milne [1]. Folosind un raţionament foarte simplu a dedus, dintr-un potenţial gravitaţional newtonian ecuaţia în cauză:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{kc^2}{r^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

(V.1)

în care constanta cosmologică a fost introdusă prin postulare. Totuşi, dacă observăm că ecuaţia (IV.18) include termenul $Ar^2/2$ care este echivalentul newtonian al termenului de expansiune cosmologică, atunci se poate pune demonstraţia lui Milne pe baze noi.

Întâi de toate trebuie să considerăm valid potenţialul (IV.18), cu α=1. Cu alte cuvinte trebuie să considerăm validă ipoteza conform căreia interiorul sferei nu este o zonă echipotenţială (teorema Earnshow). Deci nu există suprafeţe de potenţial constant. Vom avea:

$$\Phi_{(r)} = \frac{GM}{r} + \frac{Ar^2}{2}$$

(V.2)

cu G fiind constanta lui Newton şi M masa cuprinsă în interiorul sferei, $M = \frac{4\pi}{3}\rho \cdot r^3$, cu ρ fiind densitatea masică, o constantă în raport cu timpul. Se presupune că A este pozitivă, ceea ce corespunde unei forţe repulsive.

Forţa aplicată unei particule de masă m aflată în mişcare în potenţialul (V.2) o găsim ca fiind:

$$m(d^2r/dt^2) = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{Ar^2 m}{2}$$

Faptul că masa este constantă în raport cu timpul implică anularea derivatei masei în raport cu timpul sau:

$$r^3\frac{d\rho}{dt} + 3\rho r^2\frac{dr}{dt} = 0$$

Din acest rezultat intermediar şi din observaţia că:

$$\rho r\frac{dr}{dt} = -\rho r^3\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

rezultă, după câţiva paşi elementari, şi după ce se introduce şi factorul de scală, expresia integralei prime a energiei:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{kc^2}{r^2} + A$$

(V.3)

cu k o constantă adimensională dată de:

$$k = \frac{2E}{mc^2}$$

Urmând aceeaşi logică, în ecuaţia (V.1) s-a obţinut acelaşi rezultat pentru cantitatea postulată $\frac{\Lambda c^2}{3}$. Înseamnă că există o echivalenţă fizică între cele două ecuaţii. Nu este nimic ciudat în asta, se poate observa şi direct, în similarităţile care există între ecuaţiile (V.1) şi (V.3). În concluzie, dacă fixăm în ecuaţia (V.3) cantitatea:

$$A = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

(V.4)

putem spune că am găsit un echivalent newtonian pentru constanta cosmologică, [2].

V.3 Variaţia constantei geavitaţionale într-un univers newtonian

Pentru a valida soluţia (V.4), în privinţa părţii adiţionale a potenţialului (V.2), este necesar ca acest potenţial să verifice ecuaţia lui Poisson. În aceste condiţii rezolvarea ecuaţiei Poisson este formală. Părţii adiţionale a potenţialului gravitaţional îi va corespunde o densitate de energie a vidului sau o densitate de energie întunecată. Desigur, aceasta din urmă este cea mai bună soluţie. Însă are dezavantajul că este greu verificabilă în practică. Acesta este motivul pentru care vom propune o altă soluţie pentru rezolvarea ecuaţiei Poisson, soluţie care are avantajul că poate fi foarte uşor verificată în practică şi serveşte scopului nostru. Despre ce este vorba? Părţii adiţionale a potenţialului gravitaţional nu îi va mai corespunde o densitate de energie întunecată ci o constantă gravitaţională de forma:

$$G' = G + \frac{Ar^3}{3M}$$

Pentru a crea o bază de comparaţie pentru valorile obţinute în literatura de specialitate pentru variaţia constantei gravitaţionale prezentate anterior şi rezultatele noastre este nevoie să transformăm formula anterioară. Dacă o derivăm în raport cu timpul şi împărţim derivata la G vom obţine:

$$(\frac{dG/dt}{G}) = \frac{Ar^3H}{3MG}$$

(V.5)

unde s-a ţinut cont de legea lui Hubble:

$$\frac{dr}{dt} = Hr$$

Formula (V.5) mai poate fi simplificată ţinându-se seama de (V.4), de expresia masei:

$$M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$$

şi de ecuaţia Friedmann, în care s-a făcut ipoteza că ne aflăm într-un spaţiu plat, pentru a fi în concordanţă cu realităţile observaţionale curente:

$$\frac{8\pi\rho G}{3} = H^2 - \frac{\Lambda c^2}{3}$$

După un calcul simplu ecuaţia (V.5) capătă o formă mult mai simplă şi mai uşor de implementat valoric:

$$(\frac{dG/dt}{G}) = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{1}{H} - \frac{H}{\Lambda c^2}}$$

(V.6)

Dacă se ia pentru constanta lui Hubble valoarea cea mai în acord cu observaţiile actuale, şi anume 70 km/s/MPs, iar pentru constanta cosmologică $10^{-52} m^{-2}$, expresia (V.6) are valoarea $5{,}5 \times 10^{-11} an^{-1}$.

Să considerăm ecuaţia (V.1), deci prima ecuaţie Friedmann. Vom aplica acestei ecuaţii condiţia scrisă sub forma:

$$GM/r^2 = \Lambda c^2 r/3.$$

(V.7)

Dacă scriem masa M în funcţie de densitate, condiţia (V.7) va apărea puţin schimbată, sub forma:

$$4\pi G\rho = \Lambda c^2$$

(V.7')

Introducând această condiţie în ecuaţia (V.1), va rezulta după câţiva paşi elementari forma ecuaţiei Friedmann specifică acestui caz:

$$H^2 = 4\pi G\rho$$

(V.8)

Există şi o relaţie echivalentă relaţiei (V.8), care se obţine din ecuaţia (V.1) şi condiţia (V.7), dar exprimarea se face în funcţie de constanta cosmologică. Se obţine formula:

$$H^2 = \Lambda c^2$$

(V.9)

Dacă în expresia (V.6) se ţine cont de (V.9), se obţine după câţiva paşi elementari formula:

$$(dG/dt)/G = H/3$$

(V.10)

Este evident că această formulă este valabilă doar pentru cazul în care este valabilă relaţia (V.7). Dacă se adoptă pentru constanta lui Hubble o valoare care să fie în accepţiunea cât mai unanimă a comunităţii ştiinţifice internaţionale, şi anume $2,29 \times 10^{-18} s^{-1}$, atunci putem evalua expresia (V.10) la $7,25 \times 10^{-11} ani^{-1}$. O valoare, dacă privim comparativ valorile experimentale prezentate în subcapitolul precedent, mult mai apropiată de ele decât ne-am fi aşteptat.

O consecinţă importantă a ecuaţiilor (V.8) şi (V.9) apare dacă evaluăm raportul dintre densitatea materiei şi densitatea critică de la care universul este plat:

$$\Omega = \rho / \rho_c$$

Ţinându-se cont de ecuaţiile amintite se poate evalua acest raport la:

$$\Omega = 4\pi G\rho / H^2 = \Lambda c^2 / H^2 = 1$$

(V.11)

valoare limită, din care putem trage concluzia că acestui caz, corespunzător condiţiei (V.7), i se poate asocia un univers static. Într.-adevăr, dacă mergem puţin mai departe cu raţionamentul şi calculăm parametrul de decelerare corespunzător condiţiei (V.7):

$$q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$$

vedem că pentru a face acest calcul este mai simplu să evaluăm şi ecuaţia a doua Friedmann specifică acestui caz. Este destul de evident că plecând de la forma generală a ecuaţiei a doua Friedmann:

$$\dot{H} + H^2 = \ddot{a}/a = -(4\pi G/3)(\rho + 3p/c^2) + \Lambda c^2/3$$

în care se ţine seama de condiţia (V.7'), atunci se obţine rezultatul intermediar:

$$\dot{H} + H^2 = \ddot{a}/a = -4\pi G p/c^2$$

Cu acest rezultat intermediar se poate evalua imediat parametrul de decelerare:

$$q = -(\ddot{a}/a)(a^2/\dot{a}^2) = p/\rho c^2$$

Acum dacă vom considera ecuaţia de stare a fluidului:

$$p = \omega \rho c^2$$

şi cazul corespunzător unui univers dominat de materie, $\omega = 0$, este evident că obţinem un rezultat specific unui univers static. Folosind acest rezultat putem răspunde la întrebarea: ce fel de univers este cel descris de ecuaţia (V.1)? Raportul dintre densitatea materiei şi densitatea critică specific ecuaţiei (V.1) este:

$$\Omega' = 8\pi G\rho/3H^2$$

(V.12)

Raportul expresiilor (V.11) şi (V.12) se poate calcula foarte simplu şi este 3/2. Acum, cunoscând faptul că valoarea limită a expresiei (V.11) este 1, se poate deduce în mod evident că expresia (V.12) este 2/3. Deci o valoare subunitară care ne indică faptul că universul este în expansiune veşnică, în perioada dominaţiei materiei. Desigur, această valoare grosieră este una pur teoretică, diferenţa faţă de valorile experimentale este reflectată doar de lipsa de materie şi energie din univers.

V. 4 Discuţii asupra modelului

Din considerentele teoretice precedente am văzut că evaluarea expresiei (V.10) corespunde variaţiei constantei G pentru un univers static şi evaluarea expresiei (V.6) corespunde variaţiei constantei G pentru un univers aflat în expansiune. Suntem acum în măsură să analizăm din această perspectivă valorile experimentale cuprinse în

tabelul V.1. Valorile mai mari ale variaţiei constantei G decât valoarea de referinţă vor fi proprii unui univers în recesiune, în timp ce valorile mai mici ale variaţiei constantei G decât valoarea de referinţă vor fi specifice unui univers în expansiune.

Rezultatele analizei, conforme cu aşteptările, sunt cuprinse în tabelul V.2. Ne aşteptam ca aceste concluzii să fie în favoarea expansiunii universului şi ele aşa arată în cele mai multe din cazuri, 16. Dacă renunţăm la rezultatele care arată şi expansiunea şi recesiunea ca neconcludente şi neconforme cu expansiunea observată a universului, rămân celelalte 16 rezultate, foarte concludente. Unde există şi recesiune şi expansiune, acest fapt nu se datorează decât intervalelor valorice în care s-au făcut determinările. Valorile variaţiei constantei atracţiei universale au rezultat apoi , din calcul, în cadrul unei teorii sau alteia, din aceste intervale valorice experimentale, tot sub formă de interval. Ironia face ca tocmai aceste determinări experimentale, analizate prin prisma valorii expresiei (V.10) să fie cauza concluziilor echivoce. Ne-ar fi fost mai utile demersului nostru nu nişte intervale valorice ci doar nişte simple valori.

Expansiunea universului are influienţă asupra formaţiunilor galactice. Este resimţită atât în termeni de creştere a distanţelor dintre galaxii, dar şi în termeni de creştere a distanţelor intragalactice.

Aceasta este poate cea mai plauzibilă interpretare a datelor experimentale de care dispunem. Variaţia constantei G poate, de aceea, fi folosită în studiul stabilităţii galactice şi al expansiunii universului, cum iniţial am procedat, [37, 38].

Ipoteză	Valori	Referinţă
Temperatura Pământului	$dG/dt/G) < 2\times10^{-11} yr^{-1}$	[3]
Dilatarea Pământului	$(-dG/dt/G) \leq 8\times10^{-12} yr^{-1}$	[4]
Sistemul Pământ-Lună	$(dG/dt/G) = (2,6 \pm 15)\times10^{-11} yr$	[5]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 2\times10^{-11} yr^{-1}$	[6]

	$(dG/dt/G) = (-0{,}5 \pm 2) \times 10^{-11}\ yr$	[7]
	$(dG/dt/G) = (-8 \pm 5) \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[8]
	$(dG/dt/G) = (3{,}2 \pm 1{,}1) \times 10^{-11}\ yr$	[9]
Sistemul Solar	$\lvert dG/dt/G \rvert < 4 \times 10^{-10}\ yr^{-1}$	[10]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 1{,}5 \times 10^{-10}\ yr^{-1}$	[11]
	$(dG/dt/G) = (-2 \pm 10) \times 10^{-12}\ yr$	[12]
	$(dG/dt/G) = (0{,}0 \pm 2{,}0) \times 10^{-12}\ yr$	[13]
	$\lvert dG/dt/G \rvert \leq 3 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[14]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 1{,}04 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[15]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 6 \times 10^{-12}\ yr^{-1}$	[16]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 8 \times 10^{-12}\ yr^{-1}$	[17]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 10^{-12}\ yr^{-1}$	[18]
	$\lvert dG/dt/G \rvert = (2 \pm 4) \times 10^{-12}\ yr^{-1}$	[19]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 3 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[20]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 10^{-11}\ yr^{-1}$	[21]
Pulsari	$(dG/dt/G) = (1{,}0 \pm 2{,}3) \times 10^{-11}\ yr$	[22]
	$(dG/dt/G) < (1{,}10 \pm 1{,}07) \times 10^{-1}$	[23]
	$(dG/dt/G) = (-9 \pm 18) \times 10^{-12}\ yr$	[24]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 10^{-10}\ yr^{-1}$	[25]
	$0 \leq -(dG/dt/G) < 6{,}8 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[26]
	$0 \leq -(dG/dt/G) < 5{,}5 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[27]
Evoluţia stelară	$\lvert dG/dt/G \rvert < 2 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[28]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 1{,}6 \times 10^{-12}\ yr^{-1}$	[29]
	$(dG/dt/G) = (-0{,}6 \pm 4{,}2) \times 10^{-12}$	[30]
	$0 \leq -(dG/dt/G) < 4 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[31]
	$(dG/dt/G) = (-1{,}4 \pm 2{,}1) \times 10^{-11}$	[32]
	$0 \leq -(dG/dt/G) < 4 \times 10^{-11}\ yr^{-1}$	[33]
Nucleosinteza	$\lvert dG/dt/G \rvert < (2 \pm 9{,}3) \times 10^{-12}\ yr^{-1}$	[34]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 1{,}7 \times 10^{-13}\ yr^{-1}$	[35]
	$\lvert dG/dt/G \rvert < 9 \times 10^{-13}\ yr^{-1}$	[36]

Tabel V.1

Referinţă	Recesiune/ Expansiune

[3]	E
[4]	E
[5]	E+R
[6]	E
[7]	E+R
[8]	E
[9]	E
[10]	E+R
[11]	E+R
[12]	E+R
[13]	E+R
[14]	E
[15]	E
[16]	E
[17]	E
[18]	E
[19]	E+R
[20]	E
[21]	E
[22]	E+R
[23]	E
[24]	E+R
[25]	E+R
[26]	E
[27]	E
[28]	E
[29]	E
[30]	E+R
[31]	E+R
[32]	E+R
[33]	E+R
[34]	E+R
[35]	E
[36]	E

Tabel V.2

Referinţele capitolului V

[1] E. Milne-“A Newtonian expanding universe”, Quarterly J. of Math. **5**, 64, 1934;
[2] M. B. Răuţ, A Newtonian equivalent for the cosmological constant, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LIV(LX)**, no. 2, 33-38, 2010;
[3] B. W. Petley, in The Fundamental Physical Comstants and The Frontier of Measurement (Hilger, Bristol), 1985;
[4] M. W. McElhinny, S. R. Taylor and D. J. Stevenson, Nature **271**, 316, 1978;
[5] P. M. Mueller, in On the Measurement of Cosmological Variations of the Gravitational Constant, edited by L. Halphern (University of Florida, Gainesville, FL), 93, 1978;
[6] L. V. Morrison, Nature **241**, 519, 1973;
[7] G. M. Blake, Mon. Not. R. Astron. Soc. **181**, 41, 1977;
[8] T. C. Van Flandern, Mon. Not. R. Astron. Soc. **170**, 333, 1975;
[9] T. C. Van Flandern, in Precision Measurements and Fundamental Constants II, NBS Circular No. 617 (U. S. GPO, Washington, D. C.), 625.
[10] Shapiro, I. I., Smith, W. B. and Ash, M. B., 1971, Phys. Rev. Lett, **26**, 27, 1981;
[11] R. D. Reasenberg and I. I. Shapiro, in Atomic Massesand Fundamental Constants,Vol. 5 edited by J. H. Sanders and A. H. Wapstra (Plenum, New York), 643, 1976;
[12] I. I. Shapiro, in General Relativity and Gravitation, edited by N. Ashby, D.F. Bartlett and W. Wyss (Cambridge University Press, Cambridge, England), 1990;
[13] J. D. Anderson et al., in Proceedings of the 6th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Kyoto, June 1991, edited by H. Sato and T. Nakamura (World Scientific, Singapore), 353, 1992;
[14] P. J. Williams et al., Phys. Rev. Lett. **36**, 551, 1976;
[15] J. Mueller, M. Schneider, M. Soffel and H. Ruder, Astrophys. J. Lett. **382**, 101, 1991;
[16] J. O. Dickey et al., Science **265**, 482, 1994;
[17] P. J. Williams et al., Phys. Rev. D **53**, 6730, 1996;
[18] R. D. Reasenberg et al., Astrophys. J. Lett. **234**, 219, 1979;
[19] R. W. Hellings et al., Phys. Rev. Lett. **51**, 1609, 1983;

[20] R. D. Reasenberg, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **310**, 227, 1983;
[21] J. F. Chandler, R. D. Reasenberg and I. I. Shapiro, Bull. Am. Astron. Soc. **25**, 1233, 1993;
[22] T. Darmour, G. W. Gibbons and J. H. Taylor, Phys. Rev. Lett. **61**, 1151, 1988;
[23] T. Darmour and J. H. Taylor, Astrophys. J. **366**, 501, 1991 ;
[24] V. M. Kaspi et al., Astrophys. J. **428**, 713, 1994;
[25] H. Heintzmann and H. Hillebrandt, Phys. Lett. A **54**, 349, 1975;
[26] V. N. Mansfield, Nature **261**, 560, 1976;
[27] L. Goldman, Mon. Not. R. Astron. Soc. **244**, 184, 1990 ;
[28] P. Demarque et al., Astrophys. J. **437**, 870, 1994 ;
[29] D. B. Guenther et al., Astrophys. J. **498**, 871, 1998;
[30] S. E. Thorsett, Phys. Rev. Lett. **77**, 1432, 1996 ;
[31] E. Garcia-Berro et al., Mon. Not. R. Astron. Soc. **277**, 801, 1995 ;
[32] S. Del'Innocenti et al., Astron. Astrophys. **312**, 345, 1996;
[33] D. S. Dearborn and D. N. Schramm, Nature (London) **247**, 441, 1974;
[34] J. D. Barrow, Mon. Not. R. Astron. Soc. **184**, 677,1978;
[35] T. Rothman and R. Matzner, Astrophys. J. **257**, 450, 1982;
[36] F. S. Accetta et al., Phys. Lett. B **248**, 146, 1990;
[37] M. B. Răuţ- Variations of the gravitational constant with time in the framework of the expanding universe- Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LVII (LXI)**, no. 4, 77-90, 2011;
[38] M. B. Răuţ, A. Stroe, M. Buzdugan, M. Agop-Probleme actuale ale teoriei gravitaţiei, Ars Longa, Iaşi, 2011.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$x_1 = -\lambda(U^2 + V^2)$$
$$x_2 = 2UV$$
$$x_3 = V^2 - U^2$$

Capitolul VI
Elemente de mecanică invariantivă
VI.1 Mişcarea invariantivă inerţială a punctu... material. Introducere.

Formele exterioare permit studiul mişcării inerţial punctului material [1, 2]. Astfel utilizarea 1-formei inerţ... conduce prin principiul de mişcare atât la legea conservare a impulsului şi energiei cât şi la relaţ... structurale pentru impuls şi energie. Descrierea mişcării poate fi făcută atât în alternativa $\varepsilon = +1$ şi $\omega = C$, situaţie ce va fi echivalentă cu relativitatea restrânsă [3-5], cât şi în alternativa $\varepsilon = -1$. Acest ultim caz conduce la situaţii fizice cu totul speciale (particule şi antiparticule, efecte cuantice induse de materia exotică etc). Rezultatele originale au fost publicate în [6, 7] (sistematizarea pentru coerenţa internă a teoriei, corespondenţele cu modele fizice actuale etc.).

VI.2. Mişcarea i ... i material

Postulat VI.1 Spaţiul-timp este structurat ... varietate $E_3 \times T$.

Prin urmare:

1) Viteza $\mathbf{v}$ se defineşte prin relaţia:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{VI.1}$$

cu t timpul;

2) 1-forma inerţială are expresia:

$$\omega^i = \mathbf{p}d\mathbf{r} - Hdt \tag{VI.2}$$

cu $\mathbf{p}$ impulsul, şi H hamiltonianul;

3) Izotropia şi omogenitatea spaţială impun dependenţa funcţională

$$H = H(\alpha) \tag{VI.3}$$

cu α invariantul euclidian:

$$\alpha = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 \tag{VI.4}$$

Postulat VI.2 Mişcarea inerţială a punctului material este descrisă de închiderea 1-formei inerţiale (VI.2),

$$D(\omega^i) = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{r} - dH \wedge dt = 0 \qquad \text{(VI.5)}$$

sau explicit

$$D(\omega^i) = d\mathbf{p}\delta\mathbf{r} - \delta\mathbf{p}d\mathbf{r} - dH\delta t + \delta H dt = 0$$

Cum prin (VI.3) şi (VI.4) variaţia lui H este

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}\delta\mathbf{p} \qquad \text{(VI.6)}$$

(VI.5) devine:

$$D(\omega^i) = d\mathbf{p}\delta\mathbf{r} - dH\delta t + \left(-d\mathbf{r} + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}dt\right)\delta\mathbf{p} = 0 \qquad \text{(VI.7)}$$

Întrucât variaţiile $\delta\mathbf{r}, \delta t, \delta\mathbf{p}$ sunt arbitrare, din relaţia (VI.7) prin multiplicare cu $(dt)^{-1}$ şi anularea coeficienţilor acestor variaţii se obţine:

1) Legea conservării impulsului

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \qquad \text{(VI.8)}$$

2) Legea conservării energiei

$$\frac{dH}{dt} = 0 \qquad \text{(VI.9)}$$

3) Relaţia de definiţie a impulsului:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad \text{(VI.10)}$$

cu

$$m = \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)^{-1} \qquad \text{(VI.11)}$$

Vom numi m masa inerţială.

Dacă masa inerţială este constantă, adică $m = m_0 = const.$ (VI.6) cu (VI.11) devine

$$-\mathbf{p}\delta\mathbf{p} + m\delta H = 0 \qquad \text{(VI.12)}$$

Integrând (VI.l2) cu condiţia $H = 0$ pentru $\mathbf{p} = 0$ se obţine rezultatul mecanicii clasice

$$H = \frac{p^2}{2m_0} \qquad \text{(VI.13)}$$

În acelaşi context m_0 se numeşte masă de repaus astfel încât impulsul are expresia $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$. Punctul material fiind un obiect fizic de simplitate ireductibilă,

mişcarea inerţială a acestuia pe spaţiul-timp $E_3 \times T$ se diferenţiază de cea a altui punct prin masă, abstracţie făcând de poziţie şi viteză. Aşadar 1-forma cinematică ω^c

$$\omega^c = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - H dt \tag{VI.14}$$

obţinută prin (VI.2), $\omega^i = m\omega^c$, trebuie să fie aceeaşi pentru orice punct material. Această observaţia implică următorul postulat:

Postulat VI.3 Raportul $\frac{H}{m}$ este o constantă universală.

Acest raport având dimensiunea unei viteze la pătrat, adică $\frac{H}{m} = \varepsilon\omega^2$ cu $\varepsilon = \pm 1$ rezultă că hamiltonianul particulei libere are expresia:

$$H = \varepsilon m\omega^2 \tag{VI.15}$$

Din (VI.5) şi cu (VI.15) se obţine:

$$\delta H = \varepsilon\omega^2 \delta m = \mathbf{v}\delta\mathbf{p} \tag{VI.16}$$

sau încă prin multiplicarea cu m şi utilizând (VI.10),

$$\varepsilon\omega^2 m\delta m = \mathbf{p}\delta\mathbf{p} \tag{VI.17}$$

Această ultimă relaţie scrisă sub forma:

$$\delta\left(\mathbf{p}^2 - \varepsilon\omega^2 m^2\right) = 0, \tag{VI.18}$$

prin integrare devine:

$$\mathbf{p}^2 - \varepsilon\omega^2 m^2 = const \tag{VI.19}$$

Valoarea constantei de integrare se determină prin condiţia $m = m_0$ pentru $\mathbf{p} = 0$, cu m_0 masa de repaus. Se găseşte

$$\mathbf{p}^2 - \varepsilon\omega^2 m^2 = -\varepsilon\omega^2 m_0^2 \tag{VI.20}$$

de unde, ţinând seama de (VI.10), rezultă dependenţa de viteză a masei de inerţie a punctului material liber:

$$m = m_0\left(1 - \varepsilon\frac{v^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{VI.21}$$

Cu (VI.21) relaţia (VI.10) dă expresia impulsului

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}\left(1 - \varepsilon\frac{v^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{VI.22}$$

iar (VI.11) expresia energiei

$$H = m_0\varepsilon\omega^2\left(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{VI.23}$$

Masa m are semnificaţie fizică în cazul $\varepsilon = 1$ pentru $1 - \frac{v^2}{\omega^2} > 0$ ceea ce implică $v < \omega$. Cu alte cuvinte v nu poate depăşi viteza ω, adică ω este o viteză limită. Din $\mathbf{p} = cons$ rezultă pentru $m \neq 0$ legea mişcării $\mathbf{v} = cons$, adică punctul material are o mişcare rectilinie şi uniformă. Altfel spus este satisfăcut principiul inerţiei. În mecanica invariantivă ω este o viteză limită oarecare, ea fiind un atribut al luminii numai prin extrapolarea fenomenelor electromagnetice la celelalte fenomene ale lumii fizice.

Valoarea lui ω nu este supusă apriori nici unei restricţii; ea poate fi în principiu atât inferioară vitezei luminii cât şi superioară ei. Constanta ω poate fi în principiu finită şi oricât de mare, situaţie decisă în ultimă instanţă numai de experienţă.

În particular pentru $\omega \equiv c$, unde c este viteza luminii în vid, modelul conduce la expresiile relativităţii restrânse:

$$\begin{aligned} m &= m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{p} &= m_0 \mathbf{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ H \equiv E &= mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2} \end{aligned} \qquad \text{(VI.24)}$$

Pentru $v << c$ (VI.24)

$$m \approx m_0 \qquad \mathbf{p} \approx m_0 \mathbf{v} \qquad H \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2$$

cu $m_0 c^2$ energia de repaus şi $(1/2) m_0 v^2$ energia cinetică.

Tot pentru $\varepsilon = 1$ şi $\omega = c$, (VI.20) cu $H = mc^2$ devine

$$H = \pm c\left(m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}$$

O situaţie similară apare şi în teoria relativistă cuantică [8] legată de interpretarea celor două situaţii ale ecuaţiei Dirac (electron-pozitron). Într-un asemenea context soluţia de energie pozitivă, $H = c\left(m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}$, este asociată electronului, iar soluţia de energie negativă, $H = -c\left(m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}$ este asociată pozitronului.

În alternativa $\varepsilon = -1$ (VI.21), (VI.22) şi (VI.23) devin

$$m = m_0 \left(1 + \frac{v^2}{\omega^2} \right)^{-1/2}$$

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} \left(1 + \frac{v^2}{\omega^2} \right)^{-1/2}$$

$$H = -\, m\omega^2 = -\, \omega \left(m_0^2 c^2 - \mathbf{p}^2 \right)^{1/2}$$

Masa este reală şi nu există nici o limitare a vitezei. Ea descreşte când viteza creşte şi admite prin

$$m = \left(m_0^2 - \frac{\mathbf{p}}{\omega^2} \right)^{1?2}$$

masa de repaus ca o limită superioară

$$m \le m_0$$

Inerţia este astfel susceptibilă să scadă nelimitat spre zero, întrucât viteza creşte nelimitat, situaţie ce corespunde masei de mişcare infinit mici şi deci noninerţiei. Dacă masa de repaus este efectiv zero (ca în cazul particulelor de câmp) nu se pune problema ca masa să fie mai mică decât cea de repaus, aşa că masa nu mai poate scădea cu mişcarea. Ea depinde de alte caracteristici ale mişcării (de exemplu de frecvenţă ν prin $m = h\nu ?\omega^2$ unde h este constanta lui Planck), ceea ce reprezintă o dificultate: 'particula' nu se poate propaga, ea rămâne mereu în repaus. Aşadar, asemenea 'particule' trebuie să aibă o masă de repaus nenulă, ceea ce exprimă o inerţie ce depinde de valoarea vitezei ω.

Tot în alternativa $\varepsilon = -\, 1$, (VI.20) cu $H = -\, m\omega^2$ devine

$$H = \pm\omega \left(m_0^2 c^2 - \mathbf{p}^2 \right)^{1?2}$$

Rezultă atât 'particule' asociate energiei pozitive $H = \omega \left(m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2 \right)^{1?2}$, cât şi 'antiparticule' asociate energiei negative $H = -\, \omega \left(m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2 \right)^{1?2}$.

Energiei negative îi corespunde fizic un proces de decelerare la aplicarea unei forţe.

Recent, stările de energie negativă au fost corelate fie cu efectele cuantice Casimir (interacţia a două plăci conductoare sub acţiunea vidului electrono-pozitronic), Unruh (accelerarea reperelor sub acţiunea vidului electrono-pozitronic), Hawking (emisia de radiaţie prin

evaporarea unei găuri negre) [9] supraconductibilitatea gravitaţională (generarea de perechi Cooper de tip gravitaţional), etc., fie cu existenţa unor structuri spaţio-temporale cu totul speciale, sub aspecte topologiei lor, care să conecteze direct, prin adevărate tuneluri extradimensionale (faţă de hiperplanul metagalaxiei), zone foarte îndepărtate din univers (găuri de vierme) [10]. Aceste stări de energie implică un tip special de materie numită materie exotică [10].

VI.3. Metrica şi transformările Lorentz pentru universul Minkowski-Einstein

Din (VI.2) sub forma:

$$\omega^i = -\, m\frac{\omega^2 d\mathbf{t}\delta t - d\mathbf{r}\delta\mathbf{r}}{dt} \tag{VI.25}$$

rezultă că forma bilineară

$$\phi = d\mathbf{r}\delta\mathbf{r} - \omega^2 d\mathbf{t}\delta t \tag{VI.26}$$

este invariantă simultan cu forma pătratică

$$d\sigma^2 = c^2 d\mathbf{t}^2 - d\mathbf{r}^2 \tag{VI.27}$$

în raport cu un grup continuu de transformări liniare cu zece parametri de tip Lorentz-Poincaré .

Întrucât

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{\omega^2 d\mathbf{t}^2 - (d\mathbf{r})^2}} = \frac{m_0 dt}{d\sigma} \tag{VI.28}$$

sau încă

$$\frac{m}{dt} = \frac{m_0}{d\sigma} \tag{VI.29}$$

rezultă că, odată cu invarianţa 2-formei $d\sigma^2$ şi deci a formei biliniare ϕ, 1-forma inerţială

$$\omega^i = -\, m_0\frac{\omega^2 d\mathbf{t}\delta t - d\mathbf{r}\delta\mathbf{r}}{d\sigma}$$

este invariantă în raport cu acelaşi grup de tip Lorentz-Poincaré .

Expresia $\omega^2 d\mathbf{t}\delta t - d\mathbf{r}\delta\mathbf{r}$ este un cvasiprodus scalar în metrica

$$d\sigma^2 = \omega^2 d\mathbf{t}^2 - d\mathbf{r}d\mathbf{r} \tag{VI.30}$$

Spaţiul 4-dimensional $(\mathbf{r}, t)$ dotat cu această metrică este de tip Minkowski-Einstein. Mişcările $(d\mathbf{r}, dt)$ pornind de la punctul de coordonate $(\mathbf{r}, t)$ corespund mişcărilor reale dacă

$$ds^2 > 0 \tag{VI.31}$$

Mişcările pentru care

$$ds^2 = 0 \tag{VI.32}$$

deci cu viteza ω, nu sunt realizate de particule materiale ci doar de particule de câmp. Pentru puncte materiale mişcările cu viteza ω sunt doar mişcări limită.

Varietatea

$$\omega^2\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0, \tag{VI.33}$$

unde $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sunt parametrii direcţiei de mişcare pentru care,

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \frac{dx_3}{\xi_3} = \frac{dt}{\xi_0} \tag{VI.34}$$

este un hipercon cu vârful în punctul de coordonate (x_1, x_2, x_3, t) al spaţiului 4-dimensional $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. El separă acest spaţiu în două domenii, dintre care cel interior este al universului mişcărilor şi este caracterizat prin restricţia

$$\omega^2\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 > 0 \tag{VI.35}$$

Punctul (x_1, x_2, x_3, t) în mişcare îşi poartă cu el conul separator al universului mişcărilor.

Transformările liniare care lasă invariantă forma $\omega^2\xi_0^2 - \xi_1^2$ şi pentru care $\xi_2 = \xi_2^0$, $\xi_3 = \xi_3^0$ sunt transformări de tip Lorentz. Aceste transformări sunt de forma

$$\begin{aligned} \xi_0' &= \alpha\xi_0 + \beta\xi_1 \\ \xi_1' &= \gamma\xi_0 + \delta\xi_1 \end{aligned} \tag{VI.36}$$

iar coeficienţii transformării verifică identitatea

$$\omega^2\xi_0'^2 - \xi_1'^2 = \omega^2\xi_0^2 - \xi_1^2 \tag{VI.37}$$

Există atunci un argument φ pentru care

$$\begin{aligned} \alpha &= \cosh\varphi \qquad \beta = -\frac{1}{\omega}\sinh\varphi \\ \gamma &= -\omega\sinh\varphi \qquad \delta = \cosh\varphi \end{aligned} \tag{VI.38}$$

Notând

$$u = -\omega \tanh\varphi \tag{VI.39}$$

din (VI.36) rezultă transformările de tip Lorentz

$$\xi_0' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\omega^2}}}\left(\xi_0 + \frac{u}{\omega^2}\xi_1\right); \quad \xi_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\omega^2}}}(\xi_1 + u\xi_0) \tag{VI.40}$$

care formează un grup continuu cu un parametru

$$\frac{\xi_1'}{\xi_0'} = \frac{\frac{\xi_1}{\xi_0} + u}{1 + \frac{1}{\omega^2}\frac{\xi_1}{\xi_0}u} \tag{VI.41}$$

Întrucât ξ_0 şi ξ_1 sunt mărimi proporţionale cu dt respectiv dx, substituţiile

$$\frac{\xi_1'}{\xi_0}\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{\xi_1'}{\xi_0'} = \frac{dx'}{dt'} = v' \tag{VI.42}$$

introduse în (VI.41) dau legea de compunere a vitezelor:

$$v' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{\omega^2}} \tag{VI.43}$$

Din această lege rezultă că pentru $v << \omega$, $u \leq \omega$ şi viteza compusă satisface inegalitatea

$$v' \leq \omega$$

Semnul egalităţii este valabil numai dacă una dintre vitezele v sau u este egală cu ω. Într-adevăr din (VI.44) rezultă

$$\frac{v}{\omega} + \frac{u}{\omega} < 1 + \frac{vu}{\omega^2}$$

deoarece această inegalitate este echivalentă inegalităţi evidente

$$\frac{v}{\omega}\left(1 - \frac{u}{\omega}\right) < 1 - \frac{u}{\omega}$$

în ipoteza $v < \omega$, $u < \omega$. Dacă $v = \omega$ şi $u = \omega$ se obţine egalitatea.

Pentru $\omega \equiv c$, (VI.30) se reduce la metrica Minkowski iar (VI.36) la transformările Lorentz. În acelaşi context

u, v, v' au semnificaţiile obişnuite din relativitatea restrânsă. Pentru $u > \omega$ (VI.43) se reduce la legea Galilei de compunere a vitezelor

$$v' = v + u \tag{VI.44}$$

VI.4 Universul anti-Minkowski

În alternativa $\varepsilon = -1$ 1-forma (VI.2) sub forma

$$\omega^i = m\frac{d\mathbf{r}\delta\mathbf{r} + \omega^2 dt\delta t}{dt}$$

implică forma bilinară

$$\phi = d\mathbf{r}\delta\mathbf{r} + \omega^2 dt\delta t$$

invariantă, simultan cu forma pătratică

$$ds = \omega^2 dt^2 + d\mathbf{r}d\mathbf{r}$$

în raport cu grupul rototranslaţiilor 4-dimensionale.
Fibrele acestui spaţiu de tip antiminkowski, având o structură de spaţiu euclidian, sunt mult mai simple geometric decât cele ale unui spaţiu de tip Minkowski. În ele nu există mişcări de lungime nulă şi nici regiuni interzise pentru deplasări.

Fibrele sunt universuri euclidiene omegene, diferenţiate între ele prin valorile lui ω. Deci mişcarea nu poate fi descrisă decât pentru un acelaşi ω, adică în cadrul aceleiaşi fibre.

VI.5 Mişcarea inerţială a punctului material în universul Minkowski-Einstein

Întrucât transformările de tip Lorentz conduc la un spaţiu de tip Minkowski, se poate da o formulare cvadridimensională mişcării inerţiale a punctului material.

Într-adevăr, din 1-forma inerţială (VI.2) organizată în structura

$$\omega^i = \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} + \frac{i}{\omega}Ei\omega dt = p_\beta dx^\beta \tag{VI.45}$$

se pot construi următorii 4-vectori:

1) 4-vectorul impuls p_β de componente

$$p_\beta = \left(\mathbf{p}, \frac{i}{\omega} E \right) \tag{VI.46}$$

2) 4-vectorul de poziţie dx_β de componente

$$dx_\beta = (d\mathbf{r}, i\omega dt) \tag{VI.47}$$

Postulat VI.4 Mişcarea inerţială a punctului material într-un univers de tip Minkowski este descrisă de închiderea 1-formei (VI.45)

$$D(\omega^i) = dp_\beta \wedge dx_\beta = 0 \tag{VI.48}$$

Explicit (VI.48) devine

$$D(\omega^i) = dp_\beta \delta x_\beta - \delta p_\beta dx_\beta = 0$$

de unde, prin multiplicare cu timpul propriu $(dt)^{-1}$ şi anularea coeficientului lui δx_β rezultă

1) legea conservării 4-vectorului impuls

$$\frac{dp_\beta}{dt} = 0 \tag{VI.49}$$

2) relaţia de structură

$$u_\beta \delta u_\beta = 0 \tag{VI.50}$$

adică 4-vectorul u_β este ortogonal pe 4-vectorul δu_β.

VI.6 Mecanica invariantivă a sistemelor de puncte materiale. Introducere. Invarianţi euclidieni.Principiul mişcării

În subcapitolele anterioare a fost studiată mişcarea inerţială a unui punct material. Natural, se pune problema de a studia mişcarea unui sistem alcătuit din două sau mai multe puncte materiale. Astfel de sisteme sunt sistemele de corpuri cereşti, sistemul format din două stele (stea dublă) sau sistemul solar, întrucât distanţele dintre corpuri sunt mai mari în raport cu dimensiunile lor, iar forma lor nu diferă mult de cea sferică.

După cum se va vedea, studiul mişcării a două puncte materiale implică existenţa a două interacţiuni, una atractivă şi alta repulsivă. Rezultatele originale (sistematizarea teoriei pentru coerenţa internă a ei, legea de conservare a momentului cinetic, problema newtoniană

a celor două corpuri şi în particular mişcarea hiperbolică etc.) au fost publicate în [11, 12].

Postulat VI.5 Spaţiul şi timpul sunt structurate ca varietate $E_3 \times T$.

Aceasta înseamnă că sistemul inerţial de două puncte materiale va fi caracterizat de vectorii de poziţie $\mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_2$ şi vectorii de impuls $\mathbf{p}_1$ şi $\mathbf{p}_2$. Atunci invariaţii euclidieni, adică mărimile ce nu se modifică la transformările spaţiului euclidian (transformări ortogonale) sunt :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1^2; \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_2^2; \qquad \alpha = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$
$$\beta_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1; \qquad \beta_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2; \qquad \beta = \frac{1}{2}\mathbf{r}^2 \tag{VI.51}$$

unde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .Hamiltonianul sistemului este o funcţie de invarianţi euclidieni (VI.51), $H = H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta)$ iar descrierea mişcării este dată prin 1-forma

$$\omega^i = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{p}_i d\mathbf{r}_i - H dt \tag{VI.52}$$

Postulat VI.6 Mişcarea inerţială a sistemului de două puncte materiale este descrisă prin închiderea 1-formei (VI.52), adică

$$D\omega^i = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{r}_i - dH \wedge dt = 0 \tag{VI.53}$$

sau explicit :

$$D\omega^i = d\mathbf{p}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{p}_1 d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{p}_2 \delta\mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2 - dH\delta t + \delta H dt = 0 \tag{VI.54}$$

Deoarece :

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\mathbf{p}_1\delta\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\mathbf{p}_2\delta\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\mathbf{p}_1\delta\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2\delta\mathbf{p}_1)$$
$$+ \frac{\partial H}{\partial \beta_1}(\mathbf{r}\delta\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\delta\mathbf{r}) + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}(\mathbf{r}\delta\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2\delta\mathbf{r}) + \frac{\partial H}{\partial \beta}\mathbf{r}\delta\mathbf{r} \tag{VI.55}$$

relaţia (VI.54), prin gruparea termenilor, devine:

$$\left(\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{p}_1 - \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{p}_2 - \frac{\partial H}{\partial \beta}\mathbf{r} \right) \delta\mathbf{r}_1 +$$

$$+\left(\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \beta}\mathbf{r} \right) \delta\mathbf{r}_2 +$$

$$+\left(- \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{r} \right) \delta\mathbf{p}_1 + \qquad \text{(VI.56)}$$

$$+\left(- \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{r} \right) \delta\mathbf{p}_2 - \frac{dH}{dt}\delta t = 0$$

Multiplicând (VI.56) cu $(dt)^{-1}$ şi anulând coeficienţii variaţiilor $\delta\mathbf{r}_1$, $\delta\mathbf{r}_2$, $\delta\mathbf{p}_1$, $\delta\mathbf{p}_2$, δt întrucât aceştia sunt arbitrari, rezultă:

a) Ecuaţiile mişcării

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \beta}\mathbf{r}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{p}_1 - \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{p}_2 - \frac{\partial H}{\partial \beta}\mathbf{r} \qquad \text{(VI.57)}$$

b) Relaţiile de definire a impulsurilor

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{r} \qquad \text{(VI.58)}$$

cu :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt};$$

c) Legea de conservare a energiei

$$\frac{dH}{dt} = 0 \qquad \text{(VI.59)}$$

VI.7. Legi de conservare

Legea de conservare a impulsului, adică :

$$\frac{d}{d}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \qquad \text{(VI.60)}$$

se obţine prin adunarea celor două relaţii (VI.57), iar cea a energiei, (VI.59), direct din închiderea 1-formei (VI.52).

Momentul cinetic $\mathcal{L}$ pentru sistemul de două materiale are expresia:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \qquad \text{(VI.61)}$$

de unde prin derivare în raport cu timpul se obţine :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2) \qquad \text{(VI.62)}$$

Având în vedere (VI.57) şi (VI.58) se verifică faptul că:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}}{dt} = &\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{r} \right) \times \mathbf{p}_1 + \\
&+ \mathbf{r}_1 \times \left(\frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \beta}\mathbf{r} \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\mathbf{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{r} \right) \times \mathbf{p}_2 + \\
&+ \mathbf{r}_2 \times \left(- \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{p}_1 - \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{p}_2 - \frac{\partial H}{\partial \beta}\mathbf{r} \right) = \\
= &\frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2 - \frac{\partial H}{\partial \beta_1}\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1 - \frac{\partial H}{\partial \beta_2}\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2 = 0
\end{aligned} \qquad \text{(V.63)}$$

Or, acest rezultat reprezintă legea de conservare a momentului cinetic.

VI.8. Expresiile impulsurilor

Din relaţiile (VI.58), cu condiţia :

$$\Delta = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \right)^2 \neq 0 \qquad \text{(VI.64)}$$

rezultă :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \Delta^{-1}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\mathbf{v}_1 - \Delta^{-1}\frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{v}_2 + \Delta^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \beta_2}\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\frac{\partial H}{\partial \beta_1} \right)\mathbf{r} \\
\mathbf{p}_2 &= \Delta^{-1}\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\mathbf{v}_2 - \Delta^{-1}\frac{\partial H}{\partial \alpha}\mathbf{v}_1 + \Delta^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \beta_1}\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\frac{\partial H}{\partial \beta_2} \right)\mathbf{r}
\end{aligned} \qquad \text{(VI.65)}$$

Acum, cu notaţiile:

$$m_1 = \Delta^{-1}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}; \qquad m_2 = \Delta^{-1}\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \tag{VI.66}$$

$$\mu = \Delta^{-1}\frac{\partial H}{\partial \alpha} \tag{VI.67}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \Delta^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \beta_2}\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\frac{\partial H}{\partial \beta_1}\right) = h_1\chi \\ \ell_2 &= \Delta^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \beta_1}\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\frac{\partial H}{\partial \beta_2}\right) = h_2\chi \end{aligned} \tag{VI.68}$$

relaţiile (VI.65) devin:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= m_1\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 + h_1\chi\mathbf{r} \\ \mathbf{p}_2 &= m_2\mathbf{v}_2 + \mu\mathbf{v}_1 + h_2\chi\mathbf{r} \end{aligned} \tag{VI.69}$$

unde $m_i (i = 1,2)$ definesc masele inerţiale, μ masa de interacţie gravitaţională şi χ masa de interacţie dilataţională. Expresiile (VI.69) definesc impulsurile în mecanica invariantivă a sistemului de două puncte materiale.

VI.9. Expresia energiei

Dacă energia H a sistemului de două puncte materiale este concepută ca energie proprie corespunzătoare celor trei specii de masă definite prin relaţiile (VI.66), (VI.67) şi (VI.68), atunci:

Postulat VI.7 Pentru sistemul inerţial de două puncte materiale raportul H/M, cu :

$$M = m_1 + m_2 + 2\mu + 2\chi \tag{VI.70}$$

este o constantă universală, adică :

$$\frac{H}{M} = \omega^2 \tag{VI.71}$$

Conform celor expuse în capitolul doi, vom alege $\omega^2 = c^2$, C fiind viteza luminii. Rezultă expresia energiei sistemului inerţial de două puncte materiale sub forma :

$$H = (m_1 + m_2 + 2\mu + 2\chi)c^2 \tag{VI.72}$$

Întrucât :

$$m_i = \left(m_i^{02} + m_i\mathbf{v}_i^2 c^{-2}\right)^{1/2}, \quad i = 1,2 \tag{VI.73}$$

variaţia $\delta(c^2 m_i)$ devine:

$$\delta(c^2 m_i) = \mathbf{v}_i \delta(m_i \mathbf{v}_i) \tag{VI.74}$$

sau încă, având în vedere (VI.79) şi :

$$\delta F = \delta_1 F + \delta_2 F \tag{VI.75}$$

unde $\delta_1 F$ este variaţia lui F în raport cu r şi $\delta_2 F$ variaţia lui F în raport cu celelalte argumente,

$$\begin{aligned}
\delta(c^2 m_1) &= \mathbf{v}_1 \delta \mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \delta \mathbf{r} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \delta_2 \mu - \\
&- \mu \mathbf{v}_1 \cdot \delta \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \frac{\partial \ell_1}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \delta \mathbf{r} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \delta_2 \ell_1 - \ell_1 \mathbf{v}_1 \delta \mathbf{r} \\
\delta(c^2 m_2) &= \mathbf{v}_2 \delta \mathbf{p}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \delta \mathbf{r} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \delta_2 \mu - \\
&- \mu \mathbf{v}_2 \cdot \delta \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \frac{\partial \ell_2}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \delta \mathbf{r} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \delta_2 \ell_2 - \ell_2 \mathbf{v}_2 \delta \mathbf{r}
\end{aligned} \tag{VI.76}$$

Similar, se obţine:

$$\begin{aligned}
\delta(c^2 \mu) &= c^2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \delta \mathbf{r} + c^2 \delta_2 \mu \\
\delta(c^2 \chi) &= c^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \delta \mathbf{r} + c^2 \delta_2 \chi
\end{aligned} \tag{VI.77}$$

În consecinţă variaţia lui H devine :

$$\begin{aligned}
\delta H = v_1 \delta \mathbf{p}_1 + v_2 \delta \mathbf{p}_2 - [(2\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \frac{\partial \mu}{\partial r} - 2c^2 \frac{\partial \mu}{\partial r} - 2c^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} + \\
+ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \frac{\partial \ell_1}{\partial r} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \frac{\partial \ell_2}{\partial r}) \frac{\mathbf{r}}{r} + \ell_1 \mathbf{v}_1 + \ell_2 \mathbf{v}_2] \delta \mathbf{r} + \\
+ (2c^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \delta_2 \mu - \mu \delta(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \delta_2 \ell_1 - \\
- \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \delta_2 \ell_2 + 2c^2 \delta_2 \chi
\end{aligned} \tag{VI.78}$$

Substituind acum (VI.78) în (VI.54), grupând termenii şi multiplicând cu $(dt)^{-1}$ se obţine:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} - \mathbf{L} \right) \delta \mathbf{r}_1 + \left(\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} - \mathbf{L} \right) \delta \mathbf{r}_2 + \\
&+ 2c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right) \delta_2 \mu - - \mu \delta(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + 2c^2 \delta_2 \chi - \\
&- \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \delta_2 \ell_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \delta_2 \ell_2 - \frac{dH}{dt} \delta t = 0
\end{aligned} \tag{VI.79}$$

unde

$$\mathbf{L}=[2c^2\left(1-\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{c^2}\right)\frac{\partial\mu}{\partial r}+2c^2\frac{\partial\chi}{\partial r}-$$
$$-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}\frac{\partial\ell_1}{\partial r}-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}\frac{\partial\ell_2}{\partial r}]\frac{\mathbf{r}}{r}-\ell_1\mathbf{v}_1-\ell_2\mathbf{v}_2 \qquad \text{(VI.80)}$$

Prin anularea coeficienţilor variaţiilor $\delta\mathbf{r}_1$, $\delta\mathbf{r}_2$, δt întrucât aceştia sunt arbitrari se regăsesc ecuaţiile de mişcare

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}=\mathbf{L},\quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}=-\mathbf{L} \qquad \text{(VI.81)}$$

şi respectiv legea de conservare a energiei (VI.59).

VI.10. Determinarea masei de interacţie gravitaţională

Separând termenii în (VI.79) termenii care conţin pe μ, rezultă :

$$2c^2\left(1-\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{c^2}\right)\delta_2\mu=\mu\delta_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) \qquad \text{(VI.82)}$$

unde, în al doilea membru, s-a substituit δ_1 cu δ_2 întrucât r nu apare direct în paranteză. Prin integrare se obţine :

$$\mu=\left(1-\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{c^2}\right)^{-1/2}\varphi(r) \qquad \text{(VI.83)}$$

cu $\varphi(r)$ o funcţie arbitrară. Expresia lui $\varphi(r)$ se determină în urmatoarele condiţii:

1) În limita $V<<C$ teoria invariantivă a sistemului de două puncte materiale trebuie să se reducă la teoria newtoniană a gravitaţiei. A rezultat o primă formă a lui $\varphi(r)$

$$\varphi(r)=-\frac{1}{2}\frac{Gm_1^0m_2^0}{c^2r} \qquad \text{(VI.84)}$$

2) cu G constanta lui Newton, şi μ

$$\mu=-\frac{1}{2}\frac{Gm_1^0m_2^0}{c^2r} \qquad \text{(VI.85)}$$

3) Teoria invariantivă a sistemului inerţial de două puncte materiale trebuie să verifice testele teoriei gravitaţiei şi anume: avansul periheliului planetar, deflexia luminii în câmpul gravitaţional al Soarelui, deplasarea spre roşu, întârzierea ecoului radar etc.

Analiza avansului periheliului în mecanica invariantivă, efectuată de profesorul Ieronim Mihăilă de la Universitatea din Bucureşti, a condus la următoarea expresie pentru φ, [13, 14] :

$$\varphi(r) = -\frac{1}{2}\frac{Gm_1^0 m_2^0}{c^2 r}\left[1+\frac{5}{2}\frac{G(m_1^0+m_2^0)}{c^2 r}\right] \qquad \text{(VI.86)}$$

iar pentru masa de interacţie μ:

$$\mu = -\frac{1}{2}\frac{Gm_1^0 m_2^0}{c^2 r}\left[1+\frac{5}{2}\frac{G(m_1^0+m_2^0)}{c^2 r}\right]\left(1-\frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad \text{(VI.87)}$$

Ulterior, s-a obţinut, de asemenea, o expresie particulară a relaţiei (VI.87) pentru $m_1^0 >> m_2^0$ printr-o metodă lagrangeană [11, 12].

VI.11. Determinarea masei de interacţie dilataţională

După determinarea lui μ condiţia (VI.79) implică :

$$2c^2\delta_2\chi - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}\delta_2\ell_1 - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}\delta_2\ell_2 = 0 \qquad \text{(VI.88)}$$

Întrucât :

$$\begin{aligned}\delta_2\ell_1 &= h_1\delta_2\chi + \chi\delta_2 h_1\\ \delta_2\ell_2 &= h_2\delta_2\chi + \chi\delta_2 h_2\end{aligned} \qquad \text{(VI.89)}$$

relaţia (VI.88) devine:

$$\left(1-\frac{h_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}+h_2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}}{2c^2}\right)\frac{\delta_2\chi}{\chi} = \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}\delta_2 h_1+\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}\delta_2 h_2}{2c^2} \qquad \text{(VI.90)}$$

Impunând acum acestei ecuaţii soluţia :

$$\chi = \Psi(r)\left(1-\frac{h_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}+h_2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}}{2c^2}\right)^{-1/2} \qquad \text{(V.91)}$$

se găsesc pentru h_1 , h_2 expresiile:

$$h_1 = \Psi_1(r)\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}; \qquad h_2 = \Psi_2(r)\,\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \tag{V.92}$$

cu :

$$\Psi_1(r) = \frac{m_1^0}{m_1^0 + m_2^0}\frac{1}{r^2}; \qquad \Psi_2(r) = \frac{m_2^0}{m_1^0 + m_2^0}\frac{1}{r^2} \tag{V.93}$$

Deci :

$$\chi = \Psi(r)(1 - u)^{-1/2} \tag{V.94}$$

unde :

$$u = \frac{m_1^0 v_1^2 \cos^2(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}) + m_2^0 v_2^2 \cos^2(\mathbf{v}_2, \mathbf{r})}{2\left(m_1^0 + m_2^0\right)c^2} \tag{V.95}$$

şi $\Psi(r)$ o funcţie arbitrară. Explicitarea funcţiei $\Psi(r)$ a fost făcută de Octav Onicescu pe baza următoarelor considerente [3, 4] :

1) Pentru distanţe infragalactice $\chi \to 0$;
2) χ este nenul pentru valori minime ale lui r de ordinul c^2 .

În aceste condiţii :

$$\Psi(r) = -\frac{1}{2}\gamma\ell_{12}\left(\frac{r}{c^2}\right)^2 \tag{VI.96}$$

aşa încât masa de interacţie dilataţională χ are expresia:

$$\chi = -\frac{1}{2}\gamma\ell_{12}\left(\frac{r}{c^2}\right)^2 (1 - u)^{-1/2} \tag{VI.97}$$

cu γ o constantă universală şi ℓ_{12} o caracteristică asociată celor două puncte materiale ale sistemului.

VI.12. Problema celor două corpuri în mecanica newtoniană

Pentru a pune mai bine în evidenţă descrierea mişcării în cadrul mecanicii invariantive, vom prezenta mai întâi mişcarea celor două corpuri în mişcarea newtoniană, mişcare considerată de referinţă.

Problema constă în studiul mişcărilor efectuate de două corpuri sub influenţa gravitaţiei. Corpurile sunt considerate puncte materiale. Pe de altă parte sistemul este

considerat izolat, adică se neglijează influenţa gravitaţională a altor corpuri. În aceste condiţii într-un sistem de referinţă considerat fix, centrul de masă are cel mult o mişcare rectilinie şi uniformă, iar impulsul, momentul cinetic şi energia se conservă.

Mişcarea este descrisă în sistemul fix, de ecuaţiile :

$$\begin{aligned} m_1^0 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{G m_1^0 m_2^0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \\ m_2^0 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{G m_1^0 m_2^0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned} \qquad \text{(VI.98)}$$

unde G este constanta gravitaţională, m_i^0, $(i=1,2)$ sunt masele de repaus, iar r este distanţa dintre corpuri.

Cu ajutorul acestor ecuaţii se obţine ecuaţia mişcării relative într-un sistem de referinţă de orientare invariabilă şi cu originea într-unul din cele două corpuri. Pentru fixarea ideilor, vom considera mişcarea relativă a corpului de masă m_2^0 . Se obţine:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1^0 + m_2^0)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{(VI.99)}$$

unde $\mu = G(m_1^0 + m_2^0)$.

Fie $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ momentul cinetic al unităţii de masă a corpului. Se obţine:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) = 0 \qquad \text{(VI.100)}$$

ceea ce implică :

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = C \qquad \text{(VI.101)}$$

În planul mişcării fie $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varepsilon})$ o bază ortogonală, unde $\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. În coordonate polare se obţine pentru:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\boldsymbol{\rho} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}$$

şi deci :

$$C = r^2\dot{\theta} \qquad \text{(VI.102)}$$

Pe de altă parte, dacă $(1/2)\dot{\mathbf{r}}^2$ este energia cinetică a unităţii de masă, atunci :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2\right)=\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{\mu}{r^2}\dot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) \qquad \text{(VI.103)}$$

şi deci :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2-\frac{\mu}{r}\right)=0 \qquad \text{(VI.104)}$$

sau :

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2-\frac{\mu}{r}=\frac{h}{2} \qquad \text{(VI.105)}$$

Vom utiliza integralele prime (VI.102) şi (VI.105) pentru a deduce ecuaţia traiectoriei în coordonate polare, $r=r(\theta)$.

Din:

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\frac{2\mu}{r}+h \qquad \text{(VI.106)}$$

şi $r^2\dot{\theta}=C$, eliminând timpul cu ajutorul relaţiei $r=r(\theta(t))$ rezultă:

$$\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{C}{r}\right)\right]^2=\frac{2\mu}{r}+h-\frac{C^2}{r^2}=\frac{\mu^2}{C^2}+h-\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)^2 \qquad \text{(VI.107)}$$

de unde separând variabilele, adică :

$$d\theta=\pm\frac{d\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^2}+h-\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)^2}} \qquad \text{(VI.108)}$$

se obţine :

$$r=\frac{p}{1+e\cos\nu} \qquad \text{(VI.109)}$$

cu :

$$p=\frac{C^2}{\mu};\qquad e=\sqrt{1+\frac{C^2}{\mu^2}h};\qquad \nu=\theta-\theta_0 \qquad \text{(VI.110)}$$

Traiectoria este deci o conică. Evident că θ_0 dă orientarea axei de simetrie a curbei în sistemul de referinţă din planul mişcării, iar h natura conicei. Dacă $h<0$, atunci $e<1$ şi deci conica este elipsă. Pentru $h=0$

rezultă $e=1$ şi deci conica este parabolă, iar pentru $h>0$ rezultă $e>1$ şi deci conica este hiperbolă.

Pe de altă parte, din (VI.106), (VI.109) şi (VI.110) se deduce expresia :

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1-e^2}{p}\right) \tag{VI.111}$$

Se obţine :

$$h=v^2-\frac{2\mu}{r}=-\frac{\mu(1-e^2)}{p} \tag{VI.112}$$

de unde cu $a=p/(1-e^2)$ rezultă pentru parabolă $h=0$, iar pentru hiperbolă cu $a=p/(e^2-1)$, $h=\mu/a$.

Un caz deosebit de mişcare hiperbolică îl reprezintă mişcarea relativă a fotonului în raport cu un corp de masă mare comparativ cu masa acestuia, de exemplu, mişcarea fotonului în raport cu Soarele. Evident mişcarea fotonului este considerată în ipoteza corpusculară a luminii, ipoteză în care masa fotonului nu este nulă.

Dacă mişcarea este hiperbolică, atunci la orice moment trebuie să aibă loc inegalitatea $v^2>2\mu/r$. Din expresia (VI.111) cu $h=\mu/a$ se obţine :

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right) \tag{VI.113}$$

şi deci :

$$\begin{aligned} v^2_{\min}&=\lim_{r\to\infty}v^2=\frac{\mu}{a}\\ v^2_{\max}&=\mu\left(\frac{2}{r_0}+\frac{1}{a}\right)=v_0^2 \end{aligned} \tag{VI.114}$$

unde r_0 este distanţa pericentrului faţă de focar. Prin urmare viteza fotonului nu este constantă, ea luând valori în intervalul $[\mu/a, v_0]$. Pentru pericentru rezultă deci condiţia $v_0^2>2\mu/r_0$, iar pentru $r\to\infty$ condiţia $\mu/a>2\mu/v_0$, care evident este îndeplinită. Ori, pentru pericentru $r_0>2\mu/v_0^2$. Dar mărimea $2\mu/v_0^2=r_g$ cu $v_0=c$, numită în teoria relativităţii rază Schwarzschild a corpului este mult

mai mică decât raza geometrică. De exemplu pentru Soare considerând viteza luminii $v_0 \cong 3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$, masa $m_0 = 2 \cdot 10^{30} Kg$ se obţine $r_g = 3 \cdot 10^3 m$. Cum raza Soarelui este $r_0 = 696 \cdot 10^6 m$ rezultă că mişcările fotonilor în raport cu Soarele sunt hiperbolice. În particular o asemenea hiperbolă este acea tangentă la suprafaţa Soarelui care are distanţa egală cu raza Soarelui. Pentru valori perihelice $r_g < r < r_0$, hiperbola intersectează suprafaţa Soarelui, mişcarea fotonului având loc pe un arc de hiperbolă.

Pe de altă parte dacă $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ atunci mişcarea fotonului este liniară ea având loc după o normală la suprafaţa Soarelui. În concluzie traiectoriile fotonilor pot fi liniare sau hiperbolice. Din punct de vedere observaţional, astronomic, prezintă interes traiectoriile cu distanţa pericentrală mai mare sau egală cu raza corpului. În acest caz se pune în evidenţă devierea razei luminoase. Fie r_0 distanţa pericentrală faţă de centrul S al corpului.

Pentru valori $r >> r_0$ mişcarea fotonului pe hiperbolă poate fi aproximată cu mişcarea pe cele două asimptote. De aceea devierea unei raze luminoase se măsoară prin unghiul δ format de prelungirea semiasimptotei incidente şi de semiasimptota refractată, dacă recurgem la denumirile din teoria refracţiei luminii.

Când $r \to \infty$ din $1 + e\cos\nu = p/r$ se obţine, $\cos\nu_1 = -1/e$. De aceea $\varphi = \pi - \nu_1$ şi deci $\delta = \pi - 2\varphi = 2\nu_1 - \pi$. Problema se reduce acum la determinarea lui ν_1 deci a lui e. În acest scop derivând (VI.109) şi ţinând seama de (VI.102) şi (VI.110) se obţine :

$$e\sin\nu = \frac{p\dot{r}}{r^2\dot{\nu}} = \frac{p\dot{r}}{C}$$

De aici şi din (VI.109) rezultă :

$$e^2 = \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 + \frac{p^2\dot{r}^2}{C^2} = 1 + \frac{p^2}{r^2} - \frac{2p}{r} + \frac{p^2\dot{r}^2}{C^2}$$

şi deci pentru pericentru $(r = r_0,\ \dot{r}_0 = 0)$:

$$e^2 = 1 + \frac{p^2}{r_0^2} - \frac{2p}{r_0} \qquad \text{(VI.115)}$$

Dar $p = C^2 ? \mu$, iar $C = r_0^2 \cdot \dot{\theta}_0 = r_0 v_0$. Se obţine în definitiv :

$$e^2 = \frac{r_0^2 v_0^4}{\mu^2} - \frac{2 v_0^2 r_0}{\mu} + 1 \qquad \text{(VI.116)}$$

Reţinând numai primul termen, se găseşte $e = r_0 v_0 / \mu$. Deoarece deviaţia δ este dată de relaţia $\sin(\delta/2) = -\cos\nu_1 = 1/e$, unde e este mare în raport cu unitatea, se poate scrie cu o bună aproximaţie :

$$\delta = \frac{2\mu}{r_0^2 v_0} \qquad \text{(VI.117)}$$

Pentru Soare, considerând distanţa perihelică r_0 egală cu raza Soarelui, se obţine $\delta = 0'',87$. Pentru Jupiter, planeta cea mai masivă a sistemului planetar, se consideră r_0 drept raza planetei $r_0 = 71410^5 m$. Rezultă $\delta = 0'',017$.

Referinţele capitolului VI

[1] E. Cartan, Systemes Differentiels Exterieurs et Leur Applications Geometriques, Paris, Ad. Sci. et Ind., 1945, 994 ;
[2] H. Flanders, Differential Forms with Applications for the Physical Sciences, London Academic Press, New York, 1963;
[3] O. Onicescu, Mecanica, Ed. Tehnică, Bucureşti 1969;
[4] O. Onicescu, Invariantive Mechanics, Springer-Verlag, Wien 1975;
[5] M. Agop, Gabriela Ciobanu, P.D. Ioannou, C. Buzea, Cantorian $\varepsilon^{(\infty)}$ Space-Time in Cartan, de Broglie and Fields Theories, Chaos, Solitons and Fractals, vol. 14, 863-890, 2002;
[6] M. Agop, P. Crăciun, Microfractalitate, macrofractalitate şi gravitaţie, Editura Ars Longa, Iaşi, 2008;
[7] M. Agop, P. Crăciun, Cartan gravitation in fractal space-time in Particles and Fields, Editori M. Agop, P.D. Ioannou, Athens University Press, 73-104, 2005;
[8] V. Novac, Teoria cuantică a câmpurilor, Ed. Tehnică, Bucureşti 1984;

[9] J. Argyris, C. Marin, C. Ciubotaru, Physics of gravitation and the universe. Fractals and cosmological large-scale structure Vol.II, Editura Spiru Haret Iaşi şi Tehnica-Info Chişinău, 2002;
[10] C. Dariescu, M. A. Dariescu, Gravitation and fields in Einstein's Universe. Iaşi: Ed.Vesper, 1997;
[11] M. Agop, P. Crăciun, Microfractalitate, macrofractalitate şi gravitaţie, Editura Ars Longa, Iaşi, 2008 ;
[12] M. Agop, P. Crăciun, Cartan gravitation in fractal space-time in Particles and Fields, Editori M. Agop, P.D. Ioannou, Athens University Press, 73-104, 2005;
[13] I. Mihăilă, C.R. Acad. Sc. Paris 280 série A, 595, 1975 ;
[14] I. Mihăilă, Rev. Roum. Phys. 25, 3, 1980.

Capitolul VII
Multidimensionalitate sau fractalitate ?

Exprimarea care foloseşte mai multe dimensiuni pentru a se explica interacţiunile fizice la distanţe inimaginabil de mici, ar putea părea, la o primă vedere, stranie. Și asta pentru că se consideră în genere doar 3+1 dimensiuni fizice, restul fiind nişte abstracţiuni matematice compactizate într-un spaţiu infinit mic. Deci, nişte dimensiuni ipotetice, fără nici o legătură cu realitatea. Doar cele 3+1 dimensiuni fizice contând, oricât de multe dimensiuni în afara lor considerăm că ar putea exista.

Această idee este ilustrată şi mai bine când dorim să exprimăm de această dată observaţii experimentale, aceleaşi interacţiuni la distanţe foarte mici, nanometrice. Legile fizicii nu mai sunt cum le ştim, la scală normală. Legile fizicii se scriu ca şi când la scală nanometrică ne-am găsi în situaţia de a fi într-un spaţiu având mai mult cu o dimensiune decât spaţiul nostru obişnuit. Aceasta pare a fi limita naturală de la care am putea introduce altă scală, desi, efectiv, nu există nici o dimensiune suplimentară reală.

O altă modalitate, mult mai simplă din punct de vedere matematic, de a exprima interacţiunile fizice la distanţe mici este, fără îndoială, considerarea unui spaţiu-timp fractalic. Acest spaţiu-timp prezintă, în opinia mea, câteva avantaje majore faţă de un spaţiu-timp multidimensional.

Întâi de toate ar fi problema timpului. Vechea dilemă a lui Aristotel cu privire la timp, este timpul punct sau interval?, pare a fi tranşată definitiv în favoarea unui timp fractalic. Timpul, în accepţiune fractalică, este şi punct şi interval. Cu alte cuvinte punctul nu mai este conceptul matematic clasic, un obiect abstract fără dimensiuni, ci el are o structură internă, are dimensiuni, oricât de mult am dori să mergem la scale cât mai mici. O concepţie nouă faţă de cea promovată de fizica aşa-zisă oficială, în care timpul este considerat a fi interval.

Prin extrapolare, aceleaşi comentarii sunt valabile şi în cazul spaţiului fractalic, spaţiul este şi punct şi interval, nu numai interval, cum este concepţia fizicii aşa-zise oficiale. Deci, per ansamblu, într-un spaţiu-timp fractalic, continuu şi nediferenţiabil, putem merge oricât de mult dorim în

macrocosmos sau în microcosmos, la orice scală dorim, atât cât are sens fizic, fără a mai fi nevoie să introducem alte dimensiuni suplimentare, ca în cazul spaţiu-timpului multidimensional. Ca urmare, exprimarea matematică e mult mai simplă, teoriile fizice sunt mai puţin abstracte şi deci mai uşor de testat.

Dacă în cazul spaţiu-timpului multidimensional verificările experimentale se pot face, deocamdată, doar la nivel nanometric, nu acelaşi lucru se poate afirma şi despre spaţiul fractalic. Relativitatea de scală, fenomenele fizice nu mai sunt la fel la scale diferite, un nou tip de relativitate, este foarte bine ilustrată de această exprimare. Apoi fenomenele greu măsurabile, indiscernabile, erorile, fenomenele haotice sau probabilistice, pot fi uşor exprimate în spaţiu-timp fractalic. Lucrurile au mers până într-acolo încât s-a creat o fizică „paralelă” cu fizica aşa-zisă oficială, care caută să exprime totul într-un spaţiu continuu şi diferenţiabil. Și pe bună dreptate. Se obţin aceleaşi rezultate ca în cazul „oficial”, de multe ori chiar evidenţiindu-se fenomene noi.

Un avantaj şi totuşi un dezavantaj al exprimării legilor fizicii în spaţiu-timp fractalic îl constituie caracterul său total, reducţionist şi holist totodată. Legile fizicii pot fi exprimate aproximativ la fel şi la scale mari şi la scale mici, deşi, evident, nu sunt echivalente. O exprimare sintetică în care se regăsesc şi partea şi întregul. Descrierea, de exemplu, a sistemului solar şi a atomului este foarte fidelă la nivelul legii lui Newton şi al modelului lui Bohr. Dezavantajul acestei exprimări este, în opinia mea, limita de aplicabilitate a spaţiului-timp fractalic. La scale mai mici, ale mecanicii cuantice, a primei şi celei de-a doua cuantificări, spaţiul-timp fractalic nu mai reproduce rezultatele fizicii aşa-zise oficiale.

Cu toate acestea exprimarea în spaţiu-timp fractalic produce rezultate admirabile, prin acurateţea şi simplitatea lor, la aproape toate scalele lumii fizice.

În cele ce urmează vom exemplifica aceste considerente prin a arăta cum se poate modifica forţa newtoniană atunci când legile fizicii se scriu într-un spaţiu-timp continuu dar nediferenţiabil.

VII.1 Morfogeneza structurilor gravitaţionale văzute prin prisma unei aproximaţii hidrodinamice nediferenţiabile

Una din problemele principale ale gravitaţiei este aceea a formării şi evoluţiei unor structuri din acţiunea gravitaţiei la diferite scale (intragalactică, extragalactică etc.). Cu toate astea, nici la timpul prezent teoria formării galaxiilor nu este o teorie solidă, capabilă să ţină cont de proprietăţile galaxiilor, în detaliu, pentru a înţelege formarea stelelor etc. [1]. "Aceleaşi comentarii sunt valabile când este vorba şi despre formarea sistemelor planetare, cum este astăzi demonstrat de descoperirea unor sisteme planetare extrasolare care au proprietăţi neaşteptate din punctul de vedere al modelelor acceptate", [2] (v. planete de mărimea lui Jupiter, foarte apropiate de stelele centrale şi având orbite eliptice foarte accentuate, [3]). Mai mult decât atât, la scale intragalactice şi extragalactice, formarea şi evoluţia structurilor gravitaţionale este puternic conectată de materia întunecată.

Existenţa unor mari cantităţi de materie întunecată este un ingredient necesar într-o abordare standard, de vreme ce, în absenţa ei, doar atracţia gravitaţională a materiei vizibile este insuficientă pentru a forma galaxii în timpul vârstei cunoscute a universului. Cu toate astea, chiar dacă există o mulţime de observaţii indirecte ale sale (anomalii ale dinamicii-curbele de rotaţie ale galaxiilor în spirală, dispersia clusterilor de galaxii), materia întunecată scapă oricărei detecţii, [2]. De notat aici e faptul că teoria relativităţii generale (TRG) nu dă un răspuns complet tuturor problemelor menţionate.

Pe de altă parte sistemele gravitaţionale care manifestă un comportament haotic sunt recunoscute a fi sisteme ce achiziţionează self-similaritate (structurile spaţiale şi temporale, de asemenea). Mai mult decât atât, sistemele gravitaţionale manifestă fluctuaţii puternice la toate scalele posibile [2,4-11]. Unul din cele mai impresionante exemple este sugestia făcută de Laskar, precum că planetele telurice ale sistemului nostru solar

sunt haotice, [4-8]. Au fost, deasemenea, observate experimental regularităţi în distribuţia planetelor, sateliţilor şi asteroizilor sistemului solar [4-9]. Din moment ce nediferenţiabilitatea apare ca o proprietate universală a acestor sisteme, acest fapt implică necesitatea construirii unei gravitaţii nediferenţiabile, [2,10,11]. În această ordine de idei, considerând că interacţiunile gravitaţionale complexe sunt înlocuite de nediferenţiabilitate, nu mai este necesar a se folosi întregul "arsenal" de cantităţi ale gravitaţiei standard (gravitaţie diferenţiabilă, TRG). Un model de gravitaţie care tratează interacţiunile gravitaţionale în maniera anterior amintită este teoria relativităţii de scală (TRS) [2,10,11]. De amintit aici, fără intenţia de a devia de la discuţia iniţială, este că TRS poate fi pusă în corespondenţă cu teoria gravitaţiei concepută într-un spaţiu-timp Finsler, [12,13].

În TRS spaţiu-timpul devine fractal. Câteva implicaţii ale structurii fractale ale spaţiu-timpului în dinamica unor sisteme gravitaţionale sunt analizate în [14-17]. Fractalitatea spaţiului implica următoarele, [2,10,11]: 1) un număr infinit de geodezice; 2) fractalitatea geodezicelor (cea cu dimensiunea fractală $D_F = 2$ jucând un rol critic); 3) o rupere a simetriei la o reflexie temporală ($dt \leftrightarrow - dt$). O descriere completă a nediferenţiabilităţii este dată în [2,10,11].

Efectele induse mişcării (în spaţiul standard) de către structura internă, fractală, a geodezicelor (în spaţiul scalar), este întâi de a transforma mecanica clasică într-o mecanică asemănătoare celei cuantice, deci ecuaţiile fundamentale ale dinamicii newtoniene într-o ecuaţie de tip Schrödinger, [2,10]. Apoi se dau soluţiile fundamentale la aceste ecuaţii (cuantice macroscopice), care se referă la o scară largă de situaţii astrofizice (se descriu structuri self-organizate în termeni de aceeaşi constantă de cuplaj gravitaţional, de la scala Pământului, a sistemului solar şi sistemelor planetare extrasolare, a regiunilor unde se formează stele, nebuloase planetare, galaxii, a grupului nostru local de galaxii şi clusterului de galaxii din care face parte şi galaxia noastră, până la structuri gravitaţionale aflate la scale mari ale universului [2,10,11,18-21].

Mai general vorbind, TRS aplică principiul relativităţii transformărilor de scală. Acest principiu cere ca legile fundamentale ale naturii să se aplice indiferent de scală şi de sistemul de referinţă. În particular, traiectoria unei particule în mecanica cuantică poate fi descrisă printr-o curbă continuă dar nediferenţiabilă, o curbă fractalică, [2,10,11]. Pentru a include mişcarea nediferenţiabilă, fractală, în cea descrisă de teoria relativităţii, spaţiul-timp cuantic este considerat fractal şi relativ, divergent pe măsură ce scade scala, [2,10,11]. Mai mult decât atât, nu mai este necesar să înzestrezi o particulă punctuală cu masă, energie, impuls sau viteză. Particula poate fi redusă la şi identificată cu propria traiectorie, [2,10,11]. Această descriere a unui fluid liber, utilizată pentru a studia interacţiunea gravitaţională a fost făcută în [22,23].

În capitolul de faţă, folosind o aproximaţie hidrodinamică nediferenţiabilă a TRS, o metodă diferită faţă de cea folosită de Nottale, [2,10], se dau câteva aplicaţii ale studiului interacţiunilor gravitaţionale.

VII.2 Model matematic

Luând în considerare complexitatea fenomenelor implicate în morfogeneza sistemelor gravitaţionale, presupunem că dinamica acestor sisteme implică structura fractală a spaţiu-timpului, [2,10,11,24-26]. Dacă această presupunere este valabilă atunci dinamica sistemelor gravitaţionale într-un spaţiu-timp fractal este descrisă de derivata covariantă, [27-29]:

$$\frac{\hat{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla\right) - i\mathrm{D}\Delta, \mathrm{D} = D(dt)^{\left(\frac{2}{D_F}\right)-1}$$

(VII.1)

unde $\hat{\mathbf{V}}$ este câmpul vitezelor complexe:

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_D - i\mathbf{V}_F$$

(VII.2)

Aici $\mathbf{V}_D$ este viteza în sens clasic (cea diferenţiabilă), care este independentă de rezoluţia scalei (*dt*), în vreme ce

partea imaginară, $\mathbf{V}_F$, este o cantitate nouă ce apare din nediferenţiabilitate, se numeşte viteză fractală şi este dependentă de rezoluţia scalei; D este un coeficient de structură, caracteristic tranziţiei fractal-nefractal, dependent de rezoluţia de scală şi de dimensiunea fractală D_F, iar Δ este operatorul Laplace.

Notăm aici că folosirea oricăror definiţii Kolmogorov sau Haussdorff, [24 – 26], este acceptabilă pentru dimensiunea fractală, dar o dată ce o definiţie este acceptată, aceasta trebuie folosită până la finele analizatei dinamici. Mai mult decât atât, operatorul nostru, dat de ecuaţia (VII.1), este mai general decât cel al lui Nottale pentru TRS, [2,10,11]. Într-adevăr, pentru mişcări pe curbe fractale cu $D_F = 2$ (compatibile cu mişcări de tip Brownian), operatorul dat în ecuaţia (VII.1) ia forma celui din TRS, [2,10,11]:

$$\frac{\hat{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla\right) - iD\Delta$$

Aplicând operatorul dat în ecuaţia (VII.1) câmpului vitezelor complexe dat de ecuaţia (VII.2) şi acceptând că principiul al doilea Newtonian poate fi generalizat, [2,10,11], în forma:

$$\frac{\hat{d}\hat{\mathbf{V}}}{dt} = -\nabla U$$

obţinem o ecuaţie tip Nvier-Stokes:

$$\frac{\hat{d}\hat{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{V}} - iD\Delta\hat{\mathbf{V}} + \nabla U = 0$$

(VII.3)

unde $U = GM_0 m_0 / r$ este potenţialul gravitaţional scalar, cu G constanta newtoniană, M_0 masa de repaus a sursei gravitaţionale, m_0 masa de repaus a particulei de referinţă şi r distanţa dintre sursă şi particula de referinţă.

Ecuaţia (VII.3) exprimă faptul că în orice punct al oricărei traiectorii nediferenţiabile, acceleraţia locală $\partial_t \hat{\mathbf{V}}$, termenul convectiv neliniar $(\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{V}}$, termenul disipativ $\Delta\hat{\mathbf{V}}$ şi cel de forţă ∇U sunt la echilibru. De aceea, într-un spaţiu-timp fractalic, sistemul gravitaţional poate fi asimilat cu un fluid

reologic cu vâscozitate imaginară, $iD(dt)^{(2/D_F)-1}$, a cărui dinamică este descrisă de viteza complex $\hat{\mathbf{V}}$. Mai mult decât atât, de vreme ce $\hat{\mathbf{V}}$ este o funcţie fractală, [2,10,27-29], şi prezintă proprietăţi de self-similaritate, pot fi realizate câteva importante corespondenţe cu gravitaţia holografică, [30,31,46].

Dacă mişcarea sistemului gravitaţional este irotaţională:

$$\nabla\times\hat{\mathbf{V}}=0,\nabla\times\mathbf{V}_D=0,\nabla\times\mathbf{V}_F=0$$

(VII.4)

putem alege $\hat{\mathbf{V}}$ de forma:

$$\hat{\mathbf{V}}=-2\lambda D\nabla\ln\psi$$

Pentru $\psi=\sqrt{\rho}e^{iS}$, cu $\sqrt{\rho}$ amplitudinea şi S faza funcţiei de undă ψ, viteza complexă dată de ecuaţia (VII.2) capătă forma explicită:

$$\hat{\mathbf{V}}=2D\nabla S-\lambda D\nabla\ln\rho$$
$$\mathbf{V}_D=2D\nabla S$$
$$\mathbf{V}_F=D\nabla\ln\rho$$

(VII.5)

Substituind ecuaţia (VII.5) în ecuaţia (VII.3) şi separând părţile reală de cea imaginară, până la un factor de fază care poate fi zero printr-o alegere potrivită a fazei lui ψ, obţinem:

$$m_0[\frac{\partial\mathbf{V}_D}{\partial t}+(\mathbf{V}_D\cdot\nabla)\mathbf{V}_D]=-\nabla(Q+U)$$

(VII.6)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}_D)=0$$

(VII.7)

cu Q potenţialul nediferenţiabil:

$$Q=-2m_0D^2\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}=-\frac{m_0\mathbf{V}_F^2}{2}-m_0D\cdot\nabla\cdot\mathbf{V}_F$$

(VII.8)

şi m_0 masa de repaus a “entităţii” de fluid.

Funcţia $\psi(\mathbf{r},t)$ este invariantă în raport cu o schimbare a fazei $S(\mathbf{r},t)$ cu un multiplu întreg de 2π. Aşa încât din a doua ecuaţie (VII.5) rezultă circulaţia:

$$\Gamma_D = \oint m_0 \mathbf{V}_D d\mathbf{r} = 2D \oint dS = 4\pi m_0 D m, m = 0, \pm 1, \pm 2$$

(VII.9)

cu D dependent de scală.

În particular, pentru mişcări de tip brownian, $D_F = 2$ la scală microscopică, $D = \hbar / 2m_0$, cu $\hbar$ constanta lui Planck redusă, ecuaţia (VII.9) ia forma standard:

$$\Gamma_D = \oint m_0 \mathbf{V}_D d\mathbf{r} = mh$$

Domeniul de integrare al ecuaţiei (VII.9) nu poate cuprinde regiunile unde $\rho = 0$, unde $\mathbf{V}_D$ este posibil singulară, altminteri arbitrară.

Ecuaţiile (VII.6) şi (VII.7) reprezintă un sistem complet de ecuaţii diferenţiale pentru câmpurile $\rho(\mathbf{r},t)$ şi $\mathbf{V}_D(\mathbf{r},t)$. Ecuaţia (VII.9) leagă fiecare soluţie hidrodinamică nediferenţiabilă $(\rho, \mathbf{V}_D, m)$ de o soluţie ψ într-un mod unic.

Câmpul $\rho(\mathbf{r},t)$ are semnificaţia de distribuţie de probabilitate, adică probabilitatea ca o particulă să se găsească în vecinătatea $d\mathbf{r}$ a punctului $\mathbf{r}$ la timpul *t*:

$$dP = \rho d\mathbf{r}, \iiint \rho d\mathbf{r} = 1$$

(VII.10)

Integrala se face peste întreg spaţiul ocupat de sistemul gravitaţional. Orice variaţie a densităţii de probabilitate $\rho(\mathbf{r},t)$ cu timpul este însoţită de o densitate de probabilitate a curgerii $\rho \mathbf{V}_D$, înspre sau dinspre câmpul respectiv $\mathbf{r}$, ec. (VII.7).

Câmpul de viteze $\mathbf{V}_D(\mathbf{r},t)$, ec. (VII.5), a probabilităţii de poziţie se schimbă cu $\mathbf{r}$ şi t ca al unui fluid nediferenţiabil în câmpul de forţă al unui potenţial gravitaţional $U(\mathbf{r},t)$ şi al unui potenţial nediferenţiabil $Q(\mathbf{r},t)$. Fluidul nediferenţiabil prezintă, în tot cazul, o diferenţă esenţială în comparaţie cu un fluid obişnuit: într-o mişcare de rotaţie $\mathbf{V}_D(\mathbf{r},t)$ descreşte (creşte) cu descreşterea (creşterea) distanţei faţă de centru, ec. (VII.9).

Ecuaţia (VII.6) este legea conservării impulsului şi ecuaţia (VII.7) este legea conservării densităţii de probabilitate. Aceste ecuaţii definesc hidrodinamica nediferenţiabilă (HN).

Menţionăm că modelul hidrodinamic al lui Nottale poate fi obţinut din HN pentru mişcări ale entităţilor de fluid pe curbe fractale cu $D_F = 2$, compatibile cu mişcarea browniană.

Se disting două tipuri de stări gravitaţionale:

1) Stări gravitaţionale dinamice. Pentru $\partial / \partial t = 0$ şi $\mathbf{V}_D \neq 0$, astfel încât la scală diferenţiabilă ecuaţiile (VII.6), (VII.7) şi (VII.8) dau:

$$\nabla \left(m_0 \frac{\mathbf{V}_D^2}{2} + Q + U \right) = 0$$

(VII.11)

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_D) = 0$$

(VII.12)

adică:

$$m_0 \frac{\mathbf{V}_D^2}{2} + Q + U = E$$

(VII.13)

$$\rho \mathbf{V}_D = \nabla \times \mathbf{F}$$

(VII.14)

În consecinţă, inerţia, $m_0 \mathbf{V}_D \cdot \nabla \mathbf{V}_D$, forţa nediferenţiabilă, $-\nabla Q$, şi forţa gravitaţională, $-\nabla U$, se echilibrează în orice punct al câmpului, ec. (VII.11). Suma dintre energia cinetică $m_0 \mathbf{V}_D^2 / 2$, potenţialul nediferenţiabil Q şi potenţialul gravitaţional U este o constantă, constanta de integrare $E \neq E(\mathbf{r})$, ec. (VII.13). Parametrul $E \equiv <E>$ reprezintă energia totală a sistemului gravitaţional dinamic. Densitatea de curgere $\rho \mathbf{V}_D$ nu are surse, ec. (VII.12), astfel încât liniile de curent sunt închise, ec. (VII.14).

2) Stări gravitaţionale statice. Pentru $\partial / \partial t = 0$ şi $\mathbf{V}_D = 0$, astfel încât la scală nediferenţiabilă ecuaţiile (VII.6), (VII.7) şi (VII.8) dau:

$$\nabla(Q+U)=0$$

(VII.15)
adică:

$$Q+U=E$$

(VII.16)

În consecinţă, suma forţei nediferenţiabile, $-\nabla Q$, şi a celei gravitaţionale, $-\nabla U$, este nulă în oricare punct al câmpului, ec. (VII.15). Mai mult decât atât, suma potenţialului nediferenţiabil, Q, şi al celui gravitaţional , U , este invariantă, egală cu constanta de integrare $E \neq E(\mathbf{r})$, ec. (VII.16). Parametrul $E \equiv <E>$ reprezintă energia totală a sistemului gravitaţional static. Ecuaţia (VII.7) este identic satisfăcută.

VII.3 Problema unui singur corp în hidrodinamica nediferenţiabilă

Să aplicăm acum formalismul precedent la studiul dinamicii unui corp în sistemul solar. Să considerăm o planetă (sau mai general, o particulă de referinţă) aflată în câmpul gravitaţional al soarelui, U, şi câmpul colectiv al ansamblului celorlalte planete (sau mai general, al particulelor) şi să presupunem acum că acest sistem este haotic. Ideea e că efectul haotic la scale de timp mari poate fi cumulat într-o mişcare de tip brownian, cu un coeficient de difuzie D (efectul haotic asupra particulei de referinţă al tuturor celorlalte corpuri cereşti are ca rezultat mişcări pe curbe nediferenţiabile de dimensiune fractală $D_F = 2$). O particularizare a ecuaţiilor (VII.6), (VII.7) şi (VII.8) în cazul mişcării staţionare în câmp gravitaţional Udă:

$$\nabla^2\sqrt{\rho} = -\frac{1}{2m_0D^2}\left(E - \frac{1}{2}m_0\mathbf{V}_D^2 + \frac{GM_0m_0}{r}\right)\sqrt{\rho}, \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}_D)=0$$

$$0<r<\infty, 0\le\delta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$\rho(r=\infty,\delta,\varphi)=0, \rho(r,\delta,\varphi)_{\delta\le\pi/2}=\rho(r,\delta+\pi/2,\varphi)$$

(VII.17)
unde E este constanta energiei.

Curenţii de probabilitate pot curge doar în linii închise. Din pricina simetriei azimutale a sistemului gravitaţional, partea reală a potenţialului vitezelor complexe este de forma:

$$S = m\phi$$

(VII.18)

-a doua ec. (VII.5) corespunzătoare părţii reale a câmpului vitezelor complexe, independent de ϕ:

$$\mathbf{V}_D = 2D\frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\delta}\, m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(VII.19)

cu $\mathbf{e}_\phi$ vectorul unitar asociat unghiului ϕ.

Aceste consideraţii sunt în acord cu condiţia exprimată de ecuaţia (VII.9):

$$\oint m_0 \mathbf{V}_D d\mathbf{r} = 2m_0 Dm \oint \frac{\mathbf{e}_\phi d\mathbf{r}}{r\sin\delta} = 2m_0 Dm \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi m_0 Dm$$

(VII.20)

Sustituind ecuaţia (VII.19) în ecuaţia (VII.17), aceasta se reduce la:

$$\Delta\sqrt{\rho} = -\frac{1}{2m_0 D^2}\left[E - 2m_0 D^2 \frac{m^2}{r^2\sin^2\delta} + \frac{GM_0 m_0}{r}\right]\sqrt{\rho}$$

(VII.21)

ρ este independentă de ϕ, $\rho = \rho(r;\delta)$, dar $\mathbf{V}_D \| \mathbf{e}_\phi$ şi $\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}_D) = 0 = \mathbf{V}_D\cdot\nabla\rho = 0$ (ec. (VII.19)). Efectuând separarea de variabile:

$$\sqrt{\rho} = F(r)G(\delta)$$

(VII.22)

ecuaţia (VII.21) poate fi separată în două ecuaţii diferenţiale în raport cu r şi δ, respectiv:

$$\frac{r^2}{F}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) + \frac{1}{2m_0 D^2}\left(E + \frac{GM_0 m_0}{r}\right)F\right] = \lambda$$

(VII.23)

şi:

$$\lambda = -\frac{1}{G}\left[\frac{1}{\sin\delta}\frac{d}{d\delta}\left(\sin\delta\frac{dG}{d\delta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\delta}G\right]$$

(VII.24)

unde λ este un parametru. Soluţiile ecuaţiilor (VII.23) şi (VII.24) există dacă cele două constante E şi λ au valorile proprii:

$$\lambda_l = l(l+1),\quad l = 0,1,2$$

(VII.25)

şi:

$$E_n = -2m_0D^2\frac{1}{a^2n^2},\ a = \frac{4D^2}{GM_0},\ n = 1,2,3$$

(VII.26)

Aşa cum este cunoscut din [32,33] soluţiile ecuaţiei (VII.23) sunt $F(r) \sim \xi\exp\left(-\frac{1}{2}\xi\right)L_{n+l}^{2l+1}(\xi)$ unde $\xi = 2r/na$ şi soluţiile ecuaţiei (VII.24) sunt $G(\delta) \sim P_e^m(\cos\delta)$. Aşa încât, după normare se găseşte că, [32,33]:

$$\rho_{nlm} = C_{nlm}\left(\frac{2r}{na}\right)^{2l}e^{-\frac{2r}{na}}\left[L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)P_l^m(\cos\delta)\right]^2$$

$$C_{nlm} = \left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}$$

(VII.27)

În relaţiile anterioare L_{n+l}^{2l+1} sunt polinoamele Laguerre asociate, P_l^m sunt polinoamele Legendre asociate, n este echivalentul gravitaţional al numărului cuantic principal, l este echivalentul gravitaţional al numărului cuantic orbital, iar m este echivalentul gravitaţional al numărului cuantic magnetic. Din motive strict fizice este acceptabilă doar următoarea combinaţie de numere cuantice:

$$0 \le l \le n-1,\ -l \le m \le +l$$

Ecuaţiile (VII.19) şi (VII.26) reprezintă solutia completă $(\rho, \mathbf{V}_D)_{nlm}$ a hidrodinamicii nediferenţiabile în problema unui singur corp. Partea imaginară a vitezei complexe:

$$\mathbf{V}_F = D\mathcal{D}_{(\mathbf{r})}(\ln\rho_{nlm})\mathbf{e}_r$$

(VII.28)

cu $\mathbf{e}_r$ vectorul unitar corespunzător razei r, induce potenţialul nediferenţiabil:

$$Q_{nm}(r) = -2m_0D^2\left(\frac{1}{n^2a^2} - \frac{2}{ar} + \frac{m^2}{r^2\sin^2\delta}\right)$$

(VII.29)

Acest rezultat a fost obţinut din ecuaţia (VII.8), ţinându-se cont de relaţiile de recurenţă pentru polinoamele Laguerre şi Legendre asociate, [32,33]. Potenţialul nediferenţiabil conduce la energia observabilă a sistemului gravitaţional:

$$E_n = \frac{1}{2}m_0\mathbf{V}_D^2 + U(r) + Q_{nm}(r) = -2m_0D^2\frac{1}{n^2a^2}$$

(VII.30)

unde:

$$U(r) = -\frac{4m_0D^2}{ar}$$

(VII.31)

şi:

$$\frac{1}{2}m_0\mathbf{V}_D^2 = 2m_0D^2\frac{m^2}{r^2\sin^2\delta}$$

(VII.32)

Ecuaţiile (VII.29), (VII.31) şi (VII.32) prezintă singularităţi la $r=0$; deasemenea, ecuaţiile (VII.29) şi (VII.32) pentru $\delta=0$ şi $\delta=\pi$. Aceste singularităţi au implicaţii fizice, de vreme ce valorile aşteptate pentru Q_{nm}, U şi $m_0\mathbf{V}_D^2/2$ rămân finite. Poate fi văzut faptul că potenţialul nediferenţiabil, Q_{nm}, compensează potenţialul gravitaţional, U, şi energia cinetică, $m_0\mathbf{V}_D^2/2$, în orice punct al câmpului (r,δ,Φ).

Stările cu m = 0 sunt statice ($\mathbf{V}_D=0$), în vreme ce stările cu $m \neq 0$ sunt dinamice ($\mathbf{V}_D\neq 0$) (ecuaţiile (VII.29), (VII.30) şi (VII.31)). În orice stare cu $m \neq 0$ partea reală a câmpului de viteze complexe scade cu creşterea distanţei r, astfel încât pentru o direcţie dată δ, $V_\varphi \propto 1/r$ (v. ec. (VII.19)).

Deci, caracteristicile dinamice ale sistemului gravitaţional sunt specificate la scală nediferenţiabilă astfel:

1) Alegând paramentrul D de forma:

$$D=\frac{GM_0}{2w}$$

(VII.33)

unde w este o constantă fundamentală care are dimensiunea unei viteze, constanta de cuplaj macroscopic gravitaţională:

$$\alpha_g=\frac{w}{c}$$

cu c viteza luminii în vid, este introdusă de [2,34]. Apoi, pentru $w\approx 144 km/s$ şi $\alpha_g \approx 207^{-1}$ [34], se obţine, [2,10,18-21], cuantificarea sistemului solar, energiile specifice (v. ec. (VII.30)):

$$\varepsilon_n=\frac{E_n}{m_0}=-\frac{G^2M_0^2}{8D^2n^2}=-\frac{1}{2}\frac{w^2}{n^2}$$

(VII.34)

vitezele orbitale:

$$w_n=\frac{w}{n}$$

(VII.35)

semi-axele mari:

$$a_n=\frac{GM_0}{w^2}n^2=an^2$$

(VII.36)

momentele orbitale specifice:

$$\frac{L}{m_0}=2D\sqrt{l(l+1)}=\frac{GM_0}{w}\sqrt{l(l+1)}$$

(VII.37)

componentele lor “z”:

$$\frac{L_z}{m_0}=2Dm=\frac{GM_0}{w}m$$

(VII.38)

etc.

Printr-o extensie a metodei anterioare la problema celor două corpuri (cu mase de repaus comparabile), poate fi

obţinută cuantificarea în perechi de galaxii (efectul Tifft [2,35-37].

2) Forţele inerţiale $m_0\mathbf{V}_D\cdot\nabla\mathbf{V}_D$ apar pentru $m=0$ (stări statice), în care forţa newtoniană şi forţele nediferenţiabile sunt în echilibru:

$$-\nabla U-\nabla Q_{nm}=0,-\nabla Q_{nm}=\frac{m_0D^2}{ar^2}=\frac{GM_0m_0}{r^2}$$

(VII.39)

Pentru $m\neq 0$ (stări dinamice) forţele inerţiale, newtoniană şi nediferenţiabilă sunt în echilibru în fiecare punct al câmpului:

$$-m_0\mathbf{V}_D\cdot\nabla\mathbf{V}_D-\nabla U-\nabla Q_{nm}=0$$

$$-\nabla Q_{nm}=4m_0D^2\left(\frac{1}{ar^2}-\frac{m^2}{r^3\sin^2\delta}\right)=\frac{GM_0m_0}{r^2}-m_0\left(\frac{GM_0}{w}\right)^2\frac{m^2}{r^3\sin^2\delta}$$ (VII.40)

Notabil este faptul că nediferenţiabilitatea curbelor de mişcare introduce, prin forţa nediferenţiabilă, termeni suplimentari în forţa newtoniană. În fig. VII.1 a şi b arătăm comportamentul sistemului gravitaţional în cazul newtonian (m=0, fig.VII.1.a) şi în cazul nediferenţiabil (m=1, fig.VII.1.b), corespunzător forţei nediferenţiabile. De aceea, cuantificarea universală în diferite sisteme gravitaţionale, curbele de rotaţie ale galaxiilor, dispersia vitezei în clusteri de galaxii, [2,10,38], etc. sunt determinate nu doar prin potenţialul newtonian, ci şi prin potenţialul nediferenţiabil Q_{nm}. De notat aici că rezultate asemănătoare cu privire la termenii suplimentari ai forţei newtoniene, se regăsesc în referinţa [39].

VII.4 Morfogeneza sistemelor gravitaţionale în aproximaţia hidrodinamică nediferenţiabilă

Potenţialul nediferenţiabil dat de ecuaţia (VII.8) provine din nediferenţiabilitatea curbelor de mişcare şi trebuie tratat ca un termen cinetic, nu ca un termen potenţial. Mai mult decât atât, potenţialul nediferenţiabil Q

poate genera un tensor al vâscozităţii. Într-adevăr, în forma:

$$Q = -\,m_0 D^2 \left[\frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right]$$

(VII.41)
potenţialul nediferenţiabil induce tensorul simetric:

$$\sigma_{ik} = m_0 D^2 \rho \nabla_i \nabla_k \ln \rho = m_0 D^2 \left[\nabla_i \nabla_k \rho - \frac{(\nabla_i \rho)(\nabla_k \rho)}{\rho} \right]$$

(VII.42)
Divergenţa acestui tensor este egală cu densitatea de forţă nediferenţiabilă asociată cu Q:

$$\nabla \cdot \sigma = -\,\rho \nabla Q$$

(VII.43)
Cantitatea σ poate fi identificată cu tensorul vâscozităţii unei ecuaţii de tip Navier-Stokes:

$$m_0 \rho \frac{d \mathbf{V}_D}{dt} = \nabla \cdot \sigma$$

(VII.44)
Tensorul densităţii de impuls este:

$$\pi_{ik} = \rho \mathbf{V}_{Di} \mathbf{V}_{Dk} - \sigma_{ik}$$

(VII.45)
şi satisface ecuaţia impulsurilor:

$$m_0 \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}_D) = -\nabla \cdot \pi$$

(VII.46)

Pentru a completa analogia cu mecanica fluidelor clasică, introducem vâscozităţile cinematice şi dinamice:

$$\upsilon = \frac{1}{2} D$$

(VII.47)

$$\mu = \frac{1}{2} m_0 \rho D$$

(VII.48)
Cantităţile ν şi μ sunt , formal, vâscozităţi, ambele fiind induse de scala fractală. Apoi, tensorul σ_{ik} ia forma uzuală:

$$\sigma_{ik} = \mu \left(\frac{\partial V_{Fi}}{\partial X_k} + \frac{\partial V_{Fk}}{\partial X_i} \right)$$

(VII.49)

În particular, dacă σ_{ik} este diagonal, $\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}$, ecuaţiile (VII.6) şi (VII.7) iau forma:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial t} + (\mathbf{V}_D \cdot \nabla \mathbf{V}_D) \right] = - \frac{\nabla \sigma}{\rho}$$

(VII.50)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_D) = 0$$

(VII.51)

Ecuaţiile (VII.50) şi (VII.51) definesc, formal, o hidrodinamică clasică. Mai mult, folosind aceste ecuaţii în cazul existenţei unei simetrii plane, putem sugera altă soluţie pentru morfogeneza structurilor gravitaţionale, fără a mai fi nevoie să considerăm o fază inflaţionistă.

Deci, considerând un fluid barotrop, $\sigma = \rho c^2$, unde c este viteza sunetului în fluid, şi introducând coordonatele normate:

$$\omega t = \tau, kx = \xi, ky = \eta, \frac{V_x k}{\omega} = V_\xi, \frac{V_y k}{\omega} = V_\eta, \frac{\rho}{\rho_0} = N, \frac{kc}{\omega} = 1$$

(VII.52)

unde ω, k şi ρ_0 sunt parametrii critici ai fluidului, ecuaţiile (VII.50) şi (VII.51) devin:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(NV_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi}(NV_\xi^2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(NV_\xi V_\eta) = - \frac{\partial N}{\partial \xi}$$

(VII.53)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(NV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \xi}(NV_\xi V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta}(NV_\eta^2) = - \frac{\partial N}{\partial \eta}$$

(VII.54)

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(NV_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(NV_\eta) = 0$$

(VII.55)

Pentru integrarea numerică vom impune condiţiile iniţiale:

$$V_\xi(0, \xi, \eta) = 0, V_\eta(0, \xi, \eta) = 0, N(0, \xi, \eta) = 1/5, 1 \le \xi \le 2, 0 \le \eta \le 1$$ (VII.56)

şi, deasemenea, condiţiile la frontieră:

$$V_\xi(\tau,1,\eta)=V_\xi(\tau,2,\eta)=0,\quad V_\eta(\tau,1,\eta)=V_\eta(\tau,2,\eta)=0$$
$$V_\xi(\tau,\xi,0)=V_\xi(\tau,\xi,1)=0,\quad V_\eta(\tau,\xi,0)=V_\eta(\tau,\xi,1)=0$$
$$\mathcal{N}(\tau,1,\eta)=\mathcal{N}(\tau,2,\eta)=1/5$$
$$\mathcal{N}(\tau,\xi,0)=\frac{1}{10}\exp\left[-\left(\frac{\tau-1/5}{1/5}\right)^2\right]\exp\left[-\left(\frac{\xi-3/2}{1/5}\right)^2\right]$$
$$\mathcal{N}(\tau,\xi,1)=1/5$$

(VII.57)

Sistemul de ecuaţii (VII.53)-(VII.55), cu condiţiile iniţiale date de ec. (VII.56) şi cele la frontieră date de ec. (VII.57), au fost rezolvate numeric folosind metoda diferenţelor finite, [40].

Prezentăm în fig, VII.2.a, b-VII.4.a, b soluţiile numerice pentru densitatea de câmp normată $\mathcal{N}(\xi,\eta)$, fig. VII.2. a, b, pentru câmpul normat al vitezelor $V_\xi(\xi,\eta)$, fig.VII.3.a, b şi pentru câmpul normat al vitezelor $V_\eta(\xi,\eta)$, fig.VII.4.a, b, la secvenţa de timp normat $\tau=1/2$, soluţiile tridimensionale (fig.VII.2.a, VII.4.a) şi cele prin curbe de contur, soluţiile bidimensionale (fig.VII.2.b, VII.4.b).

O analiză a acestor soluţii numerice arată următoarele: 1) densitatea de câmp normată este de tip soliton, [41]. Astfel de soluţii numerice pot explica, de exemplu, distribuţia de masă a planetelor telurice şi gazoase ale sistemului solar; 2) câmpul normat al vitezelor V_ξ este simetric în raport cu simetria axelor spaţio-temporale (fig.VII.2.b), o simetrie gaussiană; 3) vârtejuri şi unde de şoc sunt induse la periferia structurii pentru câmpul normat al vitezelor V_η (fig.VII.3.b). De aceea, nediferenţiabilitatea spaţiului la scale mari implică o transformare a ecuaţiilor de mişcare în cele specifice unui sistem hidrodinamic, nediferenţiabil, macroscopic. În consecinţă, există o tendinţă de a forma structuri gravitaţionale la orice epocă: aceste structuri sunt descrise de distribuţia densităţii de probabilitate dată de pătratul modulului amplitudinilor probabilităţilor, care sunt soluţiile acestui sistem hidrodinamic nediferenţiabil. Aproximaţia hidrodinamică este fundamental diferită faţă

de cea clasică. Pierderea determinismului traiectoriilor individuale este compensată de determinismul structurilor gravitaţionale. La orice epocă, soluţii staţionare pot corespunde formei potenţialului nediferenţiabil şi condiţiilor la limită. Aceste structuri gravitaţionale pot deasemenea evolua în corespondenţă cu evoluţia mediului, [2].

Este posibil ca versiunea lui El Nabulsi a relativităţii generale, [42], să dea un răspuns complet problemelor anterior enunţate. Mai mult, există o tendinţă de a forma structuri gravitaţionale la orice epocă, fără a mai fi nevoie de o fază inflaţionistă, dată de structura fractală a spaţiului (pentru detalii v. [43-45]). Notăm că folosirea cantităţilor fizice fractale în descrierea mişcărilor nu implică o fază inflaţionistă (pentru detalii v. [2]).

VII.5 Concluzii

Presupunând că mişcarea unei particule de referinţă într-un câmp gravitaţional are loc de-a lungul unor curbe continue dar nediferenţiabile, rezultă următoarele concluzii:

1) o structură gravitaţională implică nu doar corpuri cereşti (particule de referinţă, surse de câmp gravitaţional etc.) corelate prin forţe newtoniene ci şi, deasemenea, mediul în care ele evoluează, asimilat cu un fluid complex a cărui particule se mişcă pe curbe continue dar nediferenţiabile; acest mediu, care nu poate exista ca o entitate separată de corpurile cereşti, este descris de un potenţial hidrodinamic nediferenţiabil special care lucrează simultan cu potenţialul gravitaţional standard (potenţialul newtonian); potenţialul nediferenţiabil este indus de nediferenţiabilitatea curbelor de mişcare a particulelor de fluid;
2) dinamica unei structuri gravitaţionale este descrisă de o ecuaţie tip Navier-Stokes pentru un câmp de

viteze complexe şi prezintă proprietăţi reologice (memorie);

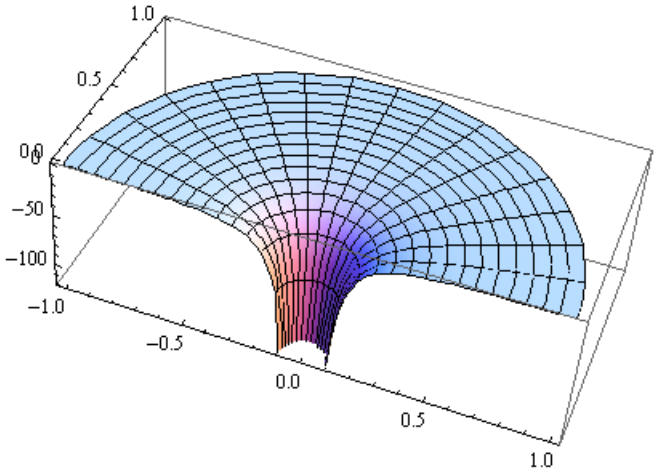
3) separarea mişcărilor la scale de interacţie presupune o hidrodinamică nediferenţiabilă care conţine, la scale diferenţiabile, legea conservării impulsului şi, la scală nediferenţiabilă, legea conservării densităţii de probabilitate;
4) aplicând aproximaţia hidrodinamicii nediferenţiabile studiului dinamicii unei particule de referinţă într-un câmp gravitaţional, rezultă cuantificarea sistemului solar (la scală intragalactică); în plus, aplicând aceeaşi metodologie în problema celor două corpuri cu mase de repaus comparabile, este obţinută, de exemplu, cuantificarea în perechi de galaxii, efectul Tifft (la scală extragalactică), [47].
5) potenţialul nediferenţiabil induce o forţă de tip newtonian pentru stările gravitaţionale statice sau o forţă newtoniană modificată (termeni suplimentari la forţa newtoniană standard) pentru stările gravitaţionale dinamice, asemănătoare cu cea prezentată în [48];
6) există o tendinţă de a forma structuri gravitaţionale la orice epocă fără a mai fi nevoie de o fază inflaţionistă, ca o consecinţă a structurii fractale a spaţiului; aceste structuri gravitaţionale sunt descrise de distribuţiile densităţii de probabilitate, date de pătratul modulului amplitudinilor probabilităţii, care sunt soluţiile numerice ale sistemului hidrodinamic nediferenţiabil.

Referinţele capitolului VII

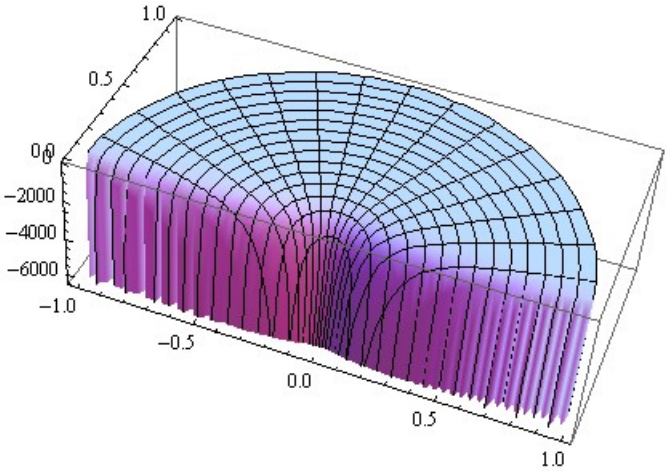
[1] J Silk, *Europhysics News* **32/6**, 210, 2001;
[2] L Nottale, *Scale Relativity and Fractal Space-Time. A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics,* Singapore, *World Scientific Publishing Company*, 2011;
[3] T Encrenaz, J P Bibring, M Blanc, *The Solar System,* Berlin, *Springer Verlag*, 1991;
[4] J Laskar, P Robutel, *Nature* **361**, 608, 1993;

[5] J. Laskar, F. Joutel, P. Robutel, *Nature* **361**, 615, 1993;
[6] J. Laskar, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3240, 2000;
[7] J. Laskar, *Icarus* **88**, 266, 1990;
[8] J. Laskar, *Chaos, Resonances and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System, I.A.U. Symp.* **152**, Kluwer*, Dordrecht*, *ed. S. Ferraz-Mello*, 1-16, 1991;
[9] J. G. Hills, *Nature* **225**, 840, 1970;
[10] L. Nottale, *Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity,* Singapore, *World Scientific*, 1993;
[11] L. Nottale, *Applying Fractals in Astronomy,* Berlin, *Springer-Verlag*, 1991;
[12] D. S. Wamalwa, J. A. Omolo, *Indian J. Phys.* **84**, 1241, 2010;
[13] J. Argyris, C. Marin, C. Ciubotariu, *Physics of Gravitation and Universe,* Chişinău, *Tehnica-INFO*, 2002;
[14] G. N. Ord, *Journal Phys. A: Math. And Gen.* **16**, 1869, 1983;
[15] G. N. Ord, *Ann Phys.* **250**, 51, 1996;
[16] G. N. Ord J A Galtieri, *Phys. Rev.Lett*. **1989**/250403, 2002;
[17] A. R. El Nabulsi *Chaos, Solitons and Fractals* **42**/5/2924, 2009;
[18] L. Nottale, *Astron. Astrophys. Lett.* **7**, 877, 1996;
[19] L. Nottale, *Astron. Astrophys. Lett.* **9**, 315, 1996;
[20] L. Nottale, *Astron. Astrophys.* **327**, 867, 1997;
[21] L. Nottale G. Schumacher, J. Gay, *Astron. Astrophys.* **322**, 1018, 1997;
[22] A. Pradhan, K. Jotania, *Indian J. Phys.* **85**, 497, 2011;
[23] S. Oli *Indian, J. Phys.* **86**, 755, 2012;
[24] B. Mandelbrot, *Les Objects Fractals,* Paris, *Flammarion*, 1975;
[25] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature,* San Francisco, *Freeman*, 1982;
[26] C. Tricot, *Courbes et dimension fractales,* Paris, *Springer*, 1993;
[27] M. Agop, P. E. Nica, P. D. Ioannou, A. Antici and V. P. Păun, *European Phys. J. D* **49**, 239, 2008;
[28] M. Agop, P. E. Nica, S. Gurlui, C. Focşa, V. P. Păun, M. Colotin, *European Phys. J. D* **56**, 405, 2010;

[29] M. Agop, O. Niculescu, A. Timofte, L. Bibire, A. S. Ghenadi, A. Nicuţă, C. Nejneru, G. V. Munceleanu, *Int. J. Theor. Phys.* **49**, 1489, 2010;
[30] S. Janiszewski, A. Karch *Phy. Rev. Lett*. **110**, 08601, 2013;
[31] T. Griffin, P. Horava, C. M. Melby – Thompson, Phys. Rev, Lett **110**, 08602, 2013;
[32] L. I. Schiff *Quantum Mechanics,* New York, *McGraw-Hill*, 1955;
[33] A. C. Phillips, *Introduction to Quantum Mechanics,* New York, *Wiley*, 2003;
[34] A. G. Agnese, R. Festa, *Phys. Lett. A* **227**, 165, 1997;
[35] W. G. Tifft, *Astrophys. J.* **206**, 38, 1976;
[36] W. G. Tifft, *Astrophys. J.* **211**, 31, 1977;
[37] W. G. Tifft, W. J. Cocke, *Astrophys. J.* **287**, 492, 1984;
[38] B. N. G. Guthrie, W. M. Napier, *Astron. Astrophys.* **310**, 353, 1996;
[39] A. R. El-Nabulsi, *Int. J. Theor. Phys.* **86**, 763, 2012;
[40] O. C. Zienkievies, R. L. Taylor, *The Finite Element Method,* New York, *McGraw-Hill*, 1991,
[41] C. P. Cristescu, *Chaos and Non-linear Dynamics. Theoretical Fundaments and Applications,* Bucharest, *Academy Publishing House*, 2008;
[42] A. R. El- Nabulsi, *Indian J. Phys.* **87**, 195, 2013;
[43] R. Penrose *The Road to Reality: a Complete Guide to the Laws of the Universe,* London, *Jonathan Cape*, 2004;
[44] S. Hawking, R. Penrose *The Nature of Space Time,* Princeton *University Press*, 2010;
[45] S. Chattopadhyay and A. Pasqua *Indian J. Phys.,* in press 2014, DOI: 10.1007/s12648-013-0328-y;
[46] M. Pricop, M. B. Răuţ, Z. Borsos, A. Baciu, M. Agop, Journal of Modern Physics **4,** 165-171, 2013;
[47] M. B. Răuţ, S. Toma, M. Pricop, V. Bârlescu, D. Timofte, M. Agop, E. Moraru, Wulfenia Journal **21**, no. 2, 245-261, 2014 ;
[48] N. Mazilu, M. Agop, C. I. Axinte, E. Radu, M. Jarcău, M. Gârţu, M. B. Răuţ, M. Pricop, M. Boicu, D. Mihăileanu and L. Vrăjitoriu, Physics Essays **27**, no. 2, 204-214, 2014.

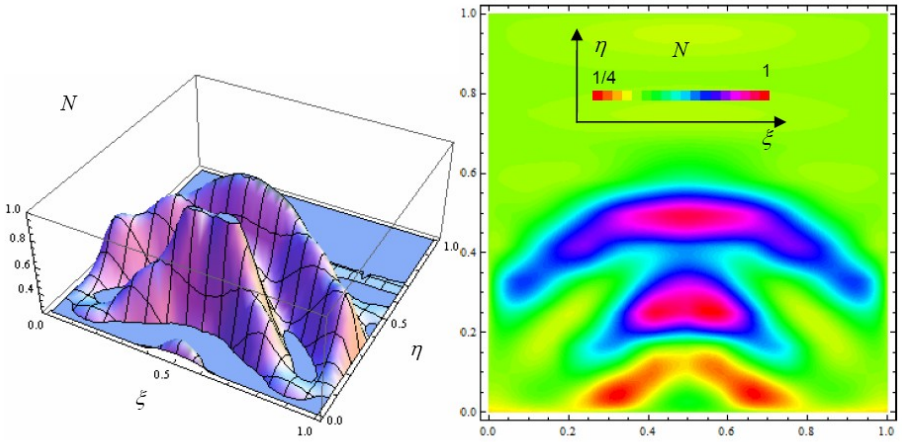


(a)



(b)

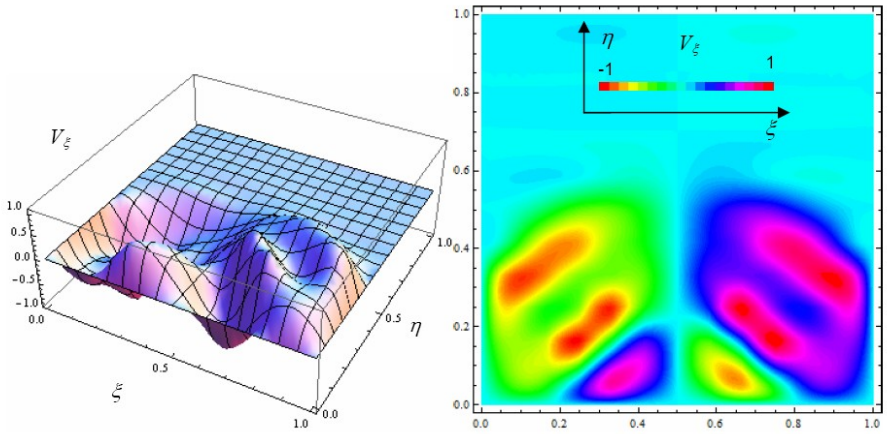
Fig.VII.1. Dependenţa forţei gravitaţionale normate F_m de coordonatele normate $(r/a, \delta)$ pentru: (a) m=0 şi (b) m=1.



(a)

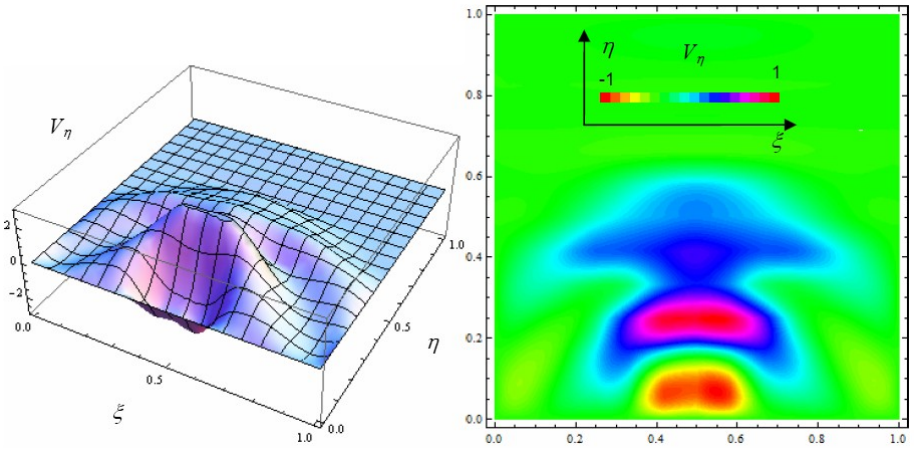
(b)

Fig.VII.2. Dependenţa densităţii de câmp normată $\mathcal{N}$, la timpul normat $\tau = 1/2$ de: a) coordonatele spaţiale normate (ξ, η) şi b) conturul bidimensional al aceleaşi densităţi de câmp normată.



(a)
(b)

Fig.VII.3. Dependenţa câmpului normat de viteze V_ξ, la timpul normat $\tau = 1/2$: a) de coordonatele spaţiale normate (ξ, η); b) conturul bidimensional al aceluiaşi câmp normat de viteze.



(a)

(b)

Fig.VII.4. Dependenţa câmpului normat de viteze V_η, la timpul normat $\tau = 1/2$:a) de coordonatele spaţiale normate (ξ, η);b) conturul bidimensional al aceluiaşi câmp normat de viteze.

Capitolul VIII
Potenţialul gravitaţional generalizat

VIII. 1. Introducere

Dacă două sfere se atrag cu o forţă proporţională cu $\frac{1}{r^2}$, atunci putem înlocui cele două sfere cu punctele materiale asociate lor. Acesta este adevărul demonstrat de teorema lui Newton. Date fiind cele afirmate ne putem întreba acum care este cea mai generală formă a unui potenţial care are această proprietate, [1]. În referinţa citată autorii îşi propun să demonstreze altfel teorema lui Newton şi reuşesc să surprindă cu câteva rezultate noi, chiar dacă în final ajung la aceleaşi concluzii cu ilustrul lor înaintaş.

Să considerăm o suprafaţă sferică de rază α, densitate σ, situată la distanţa r de un centru O şi un punct arbitrar exterior P. Dacă $\Phi_{(r)}$ este potenţialul gravitaţional la distanţa r datorat masei centrale, atunci potenţialul gravitaţional în punctul P este echivalent cu cel generat de masa $m_{(\alpha)}$ plasată în centrul O şi ţinându-se cont că:

$$m_{(\alpha)}\Phi_{(r)} + 2\pi\sigma\alpha\gamma_{(\alpha)} = \frac{2\pi\sigma\alpha}{r}\int_{r-\alpha}^{r+\alpha}\beta\Phi_{(\beta)}d\beta$$

(VIII.1)

unde $\gamma_{(\alpha)}$ este o constantă ce poate fi adunată potenţialului fără ca legea asociată forţei, care derivă din acest potenţial, să fie alterată.

Ecuaţia (VIII.1) are două clase de soluţii. Prima clasă, stabilită în [1], cuprinde potenţialele de tip Yukawa:

$$\Phi_{(r)} = \frac{A_1 e^{\xi\cdot r} + A_2 e^{-\xi\cdot r}}{r} + A_3$$

(VIII.2)

cu masa echivalentă:

$$m_{(\alpha)} = 4\pi\sigma\alpha \frac{sh(\xi \cdot \alpha)}{\xi}$$

(VIII.3)

unde A_1, A_2, A_3 sunt constante arbitrare reale, ξ este o constantă reală sau imaginară şi:

$$\gamma_{(\alpha)} = 2A_3\alpha$$

Când $A_3 = 0$ şi $\xi = 0$ obţinem masa sferei în cazul particular, newtonian:

$$m_{(\alpha)} = 4\pi\sigma\alpha^2$$

A doua clasă de soluţii ale ecuaţiei (VIII.1) conţine potenţialele algebrice , [2]:

$$\Phi_{(r)} = \frac{B_1}{r} + B_2 r^2 + B_3$$

(VIII.4)

având aceeaşi masă echivalentă $m_{(\alpha)} = 4\pi\sigma\alpha^2$, B_1, B_2, B_3 constante arbitrare reale şi:

$$\gamma_{(\alpha)} = 2B_3\alpha + 2B_2\alpha^2$$

Potenţialul newtonian $\Phi \approx r^{-1}$ este obţinut avându-se în vedere o altă proprietate a legii inversului distanţei. Pentru potenţialul Φ interiorul suprafeţei sferice trebuie să fie o regiune echipotenţială. În general, avem această proprietate dacă:

$$\gamma_{(\alpha)} \cdot r = \int_{\alpha - r}^{\alpha + r} \beta \cdot \Phi_{(\beta)} d\beta \text{, pentru } r < \alpha$$

(VIII.5)

Ecuaţia (VIII.5) are soluţia unică:

$$\Phi_{(r)} = \frac{B}{r} + C$$

(VIII.6)

Modul cum au fost obţinute cele două clase de soluţii, (VIII.2) şi (VIII.4), ne conduce la ideea unei soluţii generale care verifică ecuaţia (VIII.1), ca o combinaţie liniară a soluţiilor deja obţinute. Notăm:

$$\Phi_1 = \frac{A}{r}, \quad \Phi_2 = \frac{B}{r} e^{-\xi \cdot r}, \quad \Phi_3 = \frac{C}{r} e^{\xi \cdot r}, \quad \Phi_4 = Dr^2,$$

potenţialele care compun cele două clase de soluţii şi:

$$m_1 = m_4 = 4\pi\sigma\alpha^2, \quad m_2 = m_3 = 4\pi\sigma\alpha \frac{sh(\xi \cdot \alpha)}{\xi},$$

masele echivalente. Dacă Φ este potenţialul total:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{4} \Phi_i$$

(VIII.7)

şi este satisfăcută relaţia:

$$m \cdot \Phi = \sum_{i=1}^{4} m_i \Phi_i$$

atunci potenţialul (VIII.7) este soluţie a ecuaţiei (VIII.1), unde:

$$\gamma(\alpha) = 4E\alpha^2 + 2K\alpha$$

este o constantă adiţională care nu alterează legea forţei asociată potenţialului generalizat.

Potenţialul (VIII.7) este deci potenţialul generalizat căutat, obţinut din combinaţia liniară a soluţiilor deja existente. Se observă că pentru $\xi = 0$ se obţine cazul newtonian, clasic $\Phi = \Phi_1$. Din punct de vedere fizic acesta este cel mai simplu caz considerat. Realitatea observaţională ne îndreptăţeşte să luăm în considerare şi alte soluţii. Întâi de toate ar fi soluţia $\Phi = \Phi_1 + \Phi_4$, care ar reprezenta echivalentul newtonian al expansiunii universului, ceea ce am şi făcut într-un capitol anterior. Şi asta nu e tot. În anii din urmă s-au impus tot mai mult atenţiei lumii ştiinţifice interacţiunile gravitaţionale la scară redusă, [3]. Se încearcă tot mai mult o asociere între efectul Casimir şi interacţiunea gravitaţională la scară redusă. Această interacţiune a fost prezisă de teoriile unificatoare ale interacţiunilor fizice fundamentale, incluzând teoriile supersimetriei, a supergravitaţiei, a stringurilor, [4]. Şi teoriile multidimensionale de tip Kaluza-Klein au prezis acelaşi lucru, [5, 6]. Măsurătorile prin AFM au condus la o bună, dar nu satisfăcătoare, concordanţă a predicţiilor teoretice cu experimentul. Literatura de specialitate este foarte bogată în acest sens, nu vom cita decât [7]. Date fiind aceste considerente ne vedem îndreptăţiţi să considerăm şi soluţia corespunzătoare:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Soluţia globală, cea mai acoperitoare din punct de vedere fizic, va fi prin urmare:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4$$

(VIII.8)

care se reduce la soluţiile anterioare când razele de acţiune, de la care nu se pot neglija, devin active. De remarcat este şi faptul că toate soluţiile anterioare se pot obţine din ecuaţia (VIII.1), în mod independent, dacă:

$$m \cdot \Phi = \sum_i m_i \Phi_i$$

VIII. 2. Verificarea ecuaţiei Poisson

Din punctul de vedere al definiţiei potenţialului, numai potenţialul $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ ar rezista unei analize mai atente. Într-adevăr, valoarea la infinit a acestui potenţial ar fi zero, ccea ce ar fi conform întocmai cu ce-am învăţat noi la şcoală. Însă, în opinia noastră, această valoare s-a obţinut prin identificarea termenilor din punct şi de la infinit, şi, prin urmare, în cazul $\Phi = \Phi_1 + \Phi_4$ se obţine aceeaşi soluţie într-un punct oarecare, valoarea lui putându-se calcula la infinit, infinitul fiind definit. Prin identificarea termenilor nu se obţine nimic din ce-ar putea impieta logica. Prin urmare găsim soluţia (VIII.8), cel puţin în urma raţionamentului folosit, corectă.

Din punct de vedere fizic însă, ea nu este corectă pentru că potenţialul (VIII.8) nu este o soluţie a ecuaţiei Poisson. Deci pentru a o face corectă trebuie ca acest potenţial să satisfacă ecuaţia Poisson. În cele ce urmează vom propune două soluţii în acest sens. Ele sunt, în opinia noastră, echivalente, şi din acest motiv se pot folosi independent, după caz. De multe ori, pentru a putea compara rezultate teoretice cu valori experimentale, trebuie să adoptăm o primă soluţie. În această ordine de idei, pentru potenţialul total (VIII.8), ecuaţia Poisson este de forma:

$$\Delta\Phi = 4\pi G'(\rho + \rho_{vac})$$

(VIII.9)

în care constanta atracţiei universale cuprinde şi influienţa potenţialului repulsiv Dr^2 , iar densitatea de energie a vidului influienţa potenţialului atractiv de tip Yukawa. Influienţa ambelor potenţiale nu poate fi cumulată în densitatea de energie a vidului deoarece sunt diferite, unul e repulsiv şi celălalt atractiv, chiar dacă unul e specific distanţelor cosmice şi celălalt unor distanţe infinitezimale. Forţele care derivă din ele sunt total diferite, pentru acelaşi ordin de mărime al distanţelor. Ar fi trebuit să avem un potenţial care să cuprindă ambele influienţe iar forţa care va deriva din el să aibe forme specifice pentru ordinele de mărime ale distanţelor în discuţie, o forţă să fie atractivă şi cealaltă repulsivă. În acest caz constanta atracţiei universale n-ar mai fi înglobat şi influienţa potenţialului repulsiv, această influienţă ţinând exclusiv de densitatea de energie a vidului. Dacă am face abstracţie de această observaţie am obţine două valori diferite pentru densitatea de energie a vidului la distanţe mari: zero pentru influienţa potenţialului Yukawa şi o constantă pentru influienţa potenţialului repulsiv, când ar fi fost logic să se obţină aceeaşi valoare. La distanţe mici situaţia se schimbă, densitatea de energie pentru influienţa potenţialului Yukawa este o constantă iar pentru influienţa potenţialului repulsiv este tot o constantă, dar diferită de cea dinainte, când ar fi fost logic să se obţină aceeaşi valoare, iar valoarea pentru distanţe mici să fie aceeaşi cu valoarea pentru distanţe mari, sau cel puţin să fie un submultiplu al acesteia. Apoi, în cazul de faţă, valoarea pentru distanţe mici este lipsită de sens, implicarea constantei cosmologice la distanţe infinitezimale ridică multe semne de întrebare. Această ciudăţenie s-ar întâmpla pentru că ar exista două expresii ale densităţii de energie a vidului în loc de una. Din influienţa potenţialului repulsiv ar rezulta (VIII.9) iar pentru influienţa potenţialului Yukawa vom avea ρ_{vac}.

Acesta este motivul pentru care s-a optat pentru soluţia (VIII.9), iar constanata atracţiei universale va fi de forma:

$$G' = G + \frac{2Dr^3}{3M}$$

(VIII.10)

Ţinând cont de faptul că:

$$2D = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

(VIII.11)

se vede clar că, pentru distanţe infinitezimale, constanta atracţiei universale tinde la G şi expresia (VIII.9) devine:

$$\Delta\Phi = 4\pi G'(\rho + \rho_{vac})$$

(VIII.12)

care este expresia ecuaţiei Poisson pentru cazul $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Pentru distanţe mari influienţa atracţiei la distanţe infinitezimale se poate neglija iar ecuaţia Poisson valabilă în acest caz este:

$$\Delta\Phi = 4\pi G'\rho$$

(VIII.12')

unde $\Phi = \Phi_1 + \Phi_4$. Valabilitatea ecuaţiei Poisson în acest caz e o chestiune de calcul elementar dacă se ţine seama, ca şi în cazul precedent, că:

$$\Delta\Phi_1 = 4\pi G\rho$$

A doua soluţie de scriere a ecuaţiei Poisson este:

$$\Delta\Phi = 4\pi G'(\rho + \rho_{vac} + \rho_{dark})$$

(VIII.13)

unde potenţialul are forma generală (VIII.8). Densitatea de energie a vidului incumbă contribuţia potenţialului atractiv de tip Yukawa, iar densitatea de energie întunecată cuprinde contribuţia potenţialului repulsiv sub care se face expansiunea universului. Ambele forţe gravitaţionale ce decurg din ele sunt caracteristice unor anumite scale, de fapt prima se reduce la a doua pe măsură ce distanţa creşte, iar a doua devine neglijabilă în raport cu prima, pe măsură ce distanţa scade. Aşa încât, atât pentru distanţe mici cât şi pentru distanţe mari ecuaţia (VIII.13) se verifică, întâi pentru (VIII.12), apoi pentru (VIII.12').

Soluţiile (VIII.9) şi (VIII.13) sunt echivalente şi putem opta pentru una din ele în funcţie de caz.

VIII. 3 Discuţii

Potenţialul (VIII.8) este aşadar soluţia propusă de noi pentru a descrie interacţiunea gravitaţională la toate nivelurile, macroscopic şi microscopic. Remarcabil este faptul că această descriere se poate face într-o manieră newtoniană corectată. Explicaţia este legată probabil de nivelul de valabilitate al mecanicii newtoniene, aflat undeva la joncţiunea macrouniversului şi microuniversului, la limitele accesibilităţii măsurătorilor.

Am optat pentru soluţia propusă deoarece , după cum s-a văzut anterior, aceasta a putut fi dedusă din calcul şi astfel s-au regăsit teoretic, prin deducţie logică, cele mai multe rezultate experimentale.

Problemele legate de testele T. R. G. nu pot fi, din păcate, rezolvate cu această soluţie. Ea doar stabileşte cadrul larg al expansiunii universului, putând explica într-o foarte bună aproximaţie şi dinamica galaxiilor şi putând foarte uşor fi legată de microunivers. Din acest motiv vor fi necesare cercetări ulterioare pentru a vedea cum potenşialul (VIII.8) poate verifica testele T. R. G.

Până atunci putem spune că (VIII.8) este soluţia cea mai acoperitoare de care dispunem la ora actuală pentru a descrie interacţiunea gravitaţională.

VIII.4 Potenţialul gravitaţional al unei pături multidimensionale

VIII.4. a. Introducere

În referinţa [1] autorii încearcă să acrediteze o nouă demonstraţie a teoremei lui Newton şi au găsit câteva rezultate noi privitoare la potenţialul gravitaţional aşa-zis clasic. Prin urmare, relaţia:

$$m_{(\alpha)}\Phi_{(r)} + 2\pi\sigma\alpha\gamma_{(\alpha)} = \frac{2\pi\sigma\alpha}{r}\int_{r-\alpha}^{r+\alpha}\beta\Phi_{(\beta)}d\beta$$

(VIII.14)

are soluţiile:

$$\Phi_1 = \frac{A}{r}\ ,\ \Phi_2 = \frac{B}{r}e^{\xi\cdot r}\ ,\ \Phi_3 = \frac{C}{r}e^{\xi\cdot r}$$

(VIII.15)

unde Φ sunt potenţialele unitare şi A=B=C=G, constanta gravitaţională. Raţionamentul folosit pentru crearea relaţiei (VIII.14) este simplu. Potenţialul gravitaţional creat de un punct material, în care este concentrată toată masa unei pături sferice, este echivalentul potenţialului gravitaţional al însăşi păturii sferice, în oricare punct exterior, de referinţă, P.

În referinţa [2] se poate găsi încă o soluţie pentru potenţialul gravitaţional:

$$\Phi_4 = Dr^2$$

(VIII.16)

rezultat dezvoltat în [8] pentru cazul expansiunii universului. Pentru ca, în fine, aceste rezultate să fie generalizate, pentru toate cazurile măsurabile, în [9].

Potrivit [1] binecunoscutul potenţial newtonian Φ_1 poate fi obţinut din condiţia ca soluţia (VIII.15) să fie capabilă să creeze suprafeţe echipotenţiale în interiorul păturii sferice, adică:

$$\gamma_{(\alpha)}\cdot r = \int_{\alpha-r}^{\alpha+r}\beta\cdot\Phi_{(\beta)}d\beta\ ,\ \text{pentru}\ \ r<\alpha.$$

(VIII.17)

În cele ce urmează condiţia (VIII.17) nu va mai fi luată în considerare. Din moment ce pătura sferică pare a nu exista deoarece are acelaşi potenţial ca şi punctul care este centrul ei, aceste potenţiale fiind echivalente. Din acest motiv potenţialul gravitaţional generat de punctul material central crează suprafeţe echipotenţiale exterioare, oricare ar fi distanţa considerată. Interiorul păturii sferice este exteriorul punctului material echivalent. În acest fel

potenţialul gravitaţional undeva în interiorul păturii este acelaşi ca şi cel al punctului material corespondent, deoarece el este calculat în acelaşi punct, indiferent unde va fi acesta. În plus, a folosi potenţialul Φ_1 la scale diferite pare a fi o greşeală de neiertat; ca atare a nu lua în considerare condiţia (VIII.17) mi se pare o chestiune rezonabilă.

Pe de altă parte nu ştim care este expresia potenţialului gravitaţional în interiorul păturii sferice. Putem doar să o intuim. Dacă ne imaginăm că putem micşora pătura sferică până în vecinătatea punctului central, soluţia (VIII.15) este valabilă. În consecinţă, în cele ce urmează, vom prezenta o altă abordare a acestei probleme. În plus, vom generaliza soluţia (VIII.15) pentru mai mult de trei dimensiuni.

VIII.4.b. Cazul n-dimensional

În ecuaţia (VIII.14) putem neglija al doilea termen din stânga. În condiţiile în care relaţia (VIII.17) nu mai este valabilă, constanta γ corespunzătoare potenţialului adiţional în ecuaţia (VIII.14), termen ce poate fi adunat potenţialului gravitaţional fără ca legea forţei care rezultă să fie alterată în vreun fel, nu mai are acum nici o semnificaţie. Corespunzător, relaţia (VIII.14) devine:

$$m_{(\alpha)}\Phi_{(r)} = \frac{2\pi\sigma\alpha}{r}\int_{r-\alpha}^{r+\alpha}\beta\Phi_{(\beta)}d\beta$$

(VIII.18)

Această relaţie permite soluţiile (VIII.15) pentru potenţialul gravitaţional unitar, ca în cazul precedent. Diferenţa este acum că, cu (VIII.18), nu putem genera alte soluţii care să admită alte constante decât cele din (VIII.15). În cazul precdent am fost forţaţi să facem aceste constante nule.

Cu relaţia (VIII.18) ne putem gândi acum la cazul multidimensional. Să presupunem că:

$$m_{(\alpha)}\Phi_{(r)} = \frac{V_n \rho \sigma \alpha^{n-2}}{2r} \int_{r-\alpha}^{r+\alpha} \beta \Phi_{(\beta)} d\beta$$

(VIII.19)

este relaţia dintre potenţialul punctului central şi potenţialul corespunzător păturii n-dimensionale. În această relaţie σ este densitatea masică 2-dimensională a păturii n-dimensionale. Deci (VIII.19) nu are nici o semnificaţie pentru mai puţin de 3 dimensiuni. Masele echivalente corespunzătoare $m_{(\alpha)}$ vor fi definite în corelaţie cu potenţialul gravitaţional. În ecuaţia (VIII.19) am făcut ipoteza că potenţialul gravitaţional se datorează unei singure dimensiuni, definite ca grosime.

O suprafaţă (n-1)-dimensională, cu fiecare dimensiune definită de raza r, este, [10]:

$$S_{n-1} = V_n \frac{n}{r}$$

Pentru n par avem:

$$V_n = (1/(n/2)!) \cdot \pi^{n/2} \cdot r^n$$

Și pentru n impar:

$$V_n = (2^n((n-1)/2)! \pi^{(n-1)/2} \cdot r^n$$

Ecuaţia (VIII.19) are soluţiile:

$$\Phi_n(r) = \frac{G_n}{r}$$

(VIII.20)

cu masa echivalentă:

$$m_{(\alpha)} = V_n \rho \sigma \alpha^{n-1}$$

şi cu potenţialele Yukawa corespunzătoare:

$$\Phi_n^{1Y} = \frac{G_n e^{-\xi r}}{r} \quad , \quad \Phi_n^{2Y} = \frac{G_n e^{\xi r}}{r}$$

(VIII.21)

cu masa echivalentă:

$$m_{(\alpha)} = V_n \rho \sigma \alpha^{n-2} \frac{sh(\xi \alpha)}{\xi}$$

Soluţia generală:

$$\Phi = \Phi_n + \Phi_n^{1Y}$$

(VIII.22)

cu masa echivalentă:

$$m \cdot \Phi = \sum_i m_i \Phi_i$$

(VIII.23)

este foarte asemănătoare cu cea obţinută în [11]. Cu toate acestea se demonstrează în [12] că într-un spaţiu n-dimensional $\Phi \approx 1/r^{n-2}$. Pentru a fi în acord cu această observaţie trebuie să modificăm ecuaţia (VIII.19) după cum urmează:

$$m_{(\alpha)} \Phi_{(r)} = \frac{V_n n \sigma \alpha^{n-2}}{2r^{n-2}} \int_{r-\alpha}^{r+\alpha} \beta^{n-2} \Phi_{(\beta)} d\beta$$

(VIII.24)

Această ecuaţie are soluţiile:

$$\Phi'_n = \frac{G}{r^{n-2}}$$

(VIII.25)

şi:

$$\Phi_n^{'1Y} = \frac{G e^{-\xi r}}{r^{n-2}} \quad , \quad \Phi_n^{'2Y} = \frac{G e^{\xi r}}{r^{n-2}}$$

(VIII.26)

cu aceleaşi mase echivalente ca soluţiile (VIII.20) şi (VIII.21). Soluţia (VIII.26) este una nouă, dar în câteva privinţe ea este echivalentă cu (VIII.21). Constanta atracţiei universale este influienţată de scală şi această dependenţă poate fi exprimată de distanţa la care are loc interacţiunea. Cu cât această distanţă este mai mică cu atât este mai mare constanta gravitaţională, $G \approx G_n r^{n-3}$. Aceleaşi comentarii sunt valabile pentru (VIII.20) şi (VIII.25). Soluţia generală în acest caz trebuie să aibe masa echivalentă (VIII.23).

Privitor la soluţiile (VIII.21), ele trebuie să verifice ecuaţia lui Poisson:

$$\Delta \Phi = 4\pi G_n (\rho + \rho_{vac})$$

Deşi ele sunt generate de materie, trebuie să facem acest compromis pentru a fi în acord cu ecuaţia Poisson, la fel ca şi soluţia (VIII.20). Soluţiile (VIII26) trebuie să verifice ecuaţia Poisson:

$$\Delta\Phi = 4\pi G(\rho + \rho_{vac})$$

la fel ca şi soluţiile (VIII.25), [12].

VIII.4.c. Concluzii

În acest subcapitol, rezultatele date în [9] sunt generalizate pentru cazul multidimensional. Rezultatele nu se regăsesc în [13], dar sunt în bună concordanţă cu [11]. Cu toate acestea poate apărea situaţia când (VIII.25) şi (VIII.26) să fie valabile. În nici un caz, tentativa de a unifica aceste două soluţii nu poate duce la nişte concluzii logice. Pe de o parte, dacă G, constanta gravitaţională, depinde de scală, această dependenţă poate fi exprimată de distanţa la care are loc interacţiunea. Pe de cealalaltă parte, mărimea maselor care interacţionează poate influienţa tăria interacţiei şi, în consecinţă, valoarea fizică a constantei atracţiei universale. Probabil că viitoare determinări experimentale vor stabili cu certitudine care din soluţiile (VIII.20)-(VIII.21) şi (VIII.25)-(VIII.26) sunt cele corecte, [14].

Referinţele capitolului VIII

[1] I. N. Sneddon and C. K. Thornhill, A property of the Yukawa potential, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **45**,318-320, 1949;
[2] A. Barnes and C. K. Keorghi, Math. Gaz. **68**, 138, 1984, cited by J. D. Barrow and F. J. Tipler in-The Anthropic Cosmological Principle, Oxford Univ. Press, 307-308, 1986;
[3] E. Fishbach and C. L. Talmadge, The Search for Non-Newtonian Gravity, Springer-Verlag, New York, 1999;
[4] J. Kim, Phys. Rep. **150**, 1, 1987;
[5] E. G. Floratos and G. K. Lontaris, Phys. Lett. B, **465**, 95, 1999;
[6] A. Kehagias and K. Sfetsos, Phys. Lett. B, **472**, 39, 2000;

[7] G. L. Klimchitskaya and U. Mohideen, Int. J. of Mod. Phys. A, **17**, 4143-4152, 2002;
[8] M. B. Răuţ, The Newtonian equivalent for the cosmological constant, Bull. of Pol. Inst. of Jassy **LIV (LX)**, no. 2, 33-38, 2010;
[9] M. B. Răuţ, The generalized gravitational potential, Bull. of Pol. Inst. of Jassy **LVII (LXI)**, no. 3, 107-114, 2011;
[10] J. R. Weeks, The Shape of Space:how to visualize surfaces and three-dimensional manifolds, Marcel Dekker, Chap.14, 1988;
[11] L. Randall and R. Sundrum, An alternative to compactification, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690-4693, 1999;
[12] P. Ehrenfest, In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?, Proc. Konin. Akad. **20**, 200-209, 1918;
[13] A. R. El-Nabulsi, New astrophysical aspects from Yukawa fractional potential correction to the gravitational potential in D dimensions, INJP **86**, 763-768, 2012;
[14] M. B. Răuţ, The gravitational potential of a multidimensional shell, Bulletin of Polytechnic Institute of Jassy **LIX (LXIII)**, no. 2, 9-14, 2013.